Véges matematika I. tanári gyakorlat

2. alkalom - 2022. március 10.

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

1. Hány olyan 6-jegyű szám van, amiben pontosan 3 darab 2-es van?
Hány olyan 6-jegyű szám van, amiben pontosan 3 darab 1-es van?
Hány olyan 6-jegyű szám van, amiben pontosan 3 darab 0-s van?

Megoldásvázlat. Az első két kérdésnél kiválasztjuk a kijelölt számjegyek helyét $\binom{6}{3}$-féleképpen, majd ügyelünk, hogy a többi helyiértéket olyan számjegyekkel töltsük fel, ami különbözik az eddig lehelyezettől. Innen adódik az eredmény: $\binom{6}{3} \cdot 9^3$-nek adódna. Viszont itt a 0-val kezdődőket is megszámolhattuk, amikor az első jegy 0, és a maradék 5 helyiértékre pakoltuk a kijelölt 1-est avagy 2-est. Az ilyen rossz esetek száma: $\binom{5}{3} \cdot 9^2$. Tehát összesen $\binom{6}{3} \cdot 9^3 - \binom{5}{3} \cdot 9^2$ esetet kapunk.
A harmadik kérdésnél a 0-k helyét $\binom{6}{3}$-féleképpen választhatjuk, ezután döntünk a maradék helyeken milyen nem-nuillák vannak. Innen adódik az eredmény: $\binom{5}{3} \cdot 9^3$.

2. Arthur király és 30 lovagja letelepszik a kerekasztal köré.
a)Hányféle sorrend alakulhat ki? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket nem különböztetjük meg.)
b) És ha Lancelot Arthur mellett ül?
c) És ha Lancelot Arthur mellett ül, de Galahald nem mer Lancelot jobbjára ülni?

Megoldásvázlat. a) Ezt ciklikus permutációnak hívják (mert az elforgatottakat nem különböztetjük meg). Az összes ülésrend 31! volna, ám így minden ciklikus ülésrendet 31-szer számoltunk (ennyi elforgatottja van minden ülésrendnek), így a tehénszabály miatt $31!/31 = 30!$ ülésrend van.

Másképp: Ha úgyis elforgathatjuk az ülésrendet, föltehető, hogy Arthur király helyét rögzítjük. A maradék 30 helyre 30 lovagot 30!-féleképpen helyezhetünk el. Így minden (ciklikus) ülésrendet pontosan egyszer számoltunk.

b) Itt 29 lovagot és párost (Arthur–Lancelot párt) kell leültetni, ez 30 dolog. A párra úgy gondolunk, hoyg össze vannak ragasztva. Mivel kétféleképpen ragaszthatunk, a válasz $2 \cdot 29!$.

c) Ha Lancelot Arthur balján ül, akkor 29!-féleképpen ülhetnek a többiek. Ha a jobbján, akkor Galahaldnak az elején a 28 jó helyből választva $28 \cdot 28!$. Összesen ez $29! + 28 \cdot 28!$. Másképp: Összes mínusz rossz gondolatmenettel: $2 \cdot 29! - 28!$

3. Egy zöldségesben 8-féle alma kapható. Hányféleképpen vásárolhatunk belőlük öt darabot, ha
a) minden fajtából legfeljebb egyet választunk?
b) egy fajtából bármennyit választhatunk?

Megoldásvázlat. a) Ki kell választani a 8 fajtából 5 fajtát, amiből veszünk egyet-egyet: ez $\binom{8}{5}$-féleképpen tehető meg.
b) Itt azt kell megmondani, melyik fajta almából hány darabot veszünk; ez ismétléses kombináció (gombóc–pálcika módszer), azaz 5 gombócot (kiválasztójelet, ezek kódolják a darabszámot) és $8 - 1 = 7$ pálcikát (elválasztójel, ezek határolják el a fajtákat) kell sorbarakni. Minden sorrend megfelel pontosan egy kiválasztásnak. Tehát $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$-féleképpen választhatunk.

4. a) Egy 2m×2m-es táblába belelövünk öt golyót. Mutassuk meg, hogy lesz kettő, melyek távolsága legfeljebb $1,5$m!
b) És hány golyót kellene belelőni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább hat, melyek páronként legfeljebb másfél méterre vannak egymástól?

Megoldásvázlat. Természetes módon fölosztva a táblát négy 1m×1m-es részre, észrevehetjük, hogy ezen kis négyzetek legtávolabbi pontjai (az átellenes sarkai) között a távolság $\sqrt{2} < 1,5$ méter. (az hogy ezek a legtávolabbiak, a Pitharorasz tételből azonnal látszik). Tehát ha két golyó ugyanabba a kis négyzetbe kerül, akkor a távolságuk biztosan nem több másfél méternél, tehát ezek megfelelnek skatulyáknak. A skatulya-elv

szerint öt golyót négy skatulyába téve biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amibe legalább két golyó kerül, ami az észrevételünk fényében bizonyítja az állítást.
b) Több mint $5 \cdot 4$ golyót belelőve a táblába biztosan lesz olyan skatulya, amibe több mint 5 golyó kerül. Ezek közül bármely kettő legfeljebb $1,5$ méterre van egymástól, azaz 21 golyó bizonyosan elég. Húsz viszont nem: a tábla négy sarkába 5-5 golyót lőve nagyon közel egymáshoz nem lesz hat olyan, melyek páronként közel lennének egymáshoz.

5. a) Hányféle anagramma készíthető a KOMBINATORIKA szóból?
b) És ha a mássalhangzók sorrendje nem változhat meg? (A helyük megváltozhat, csak az egymás közti sorrendjük maradjon meg.)

Megoldásvázlat. a) Sima ismétléses permutáció: $\frac{13!}{2!2!2!2!}$. Lehet szokás szerint úgy is, hogy a betűk helyeit választjuk ki sorban, ekkor ugyanezt az eredményt kapjuk, csak a $\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{}{3}5!$ alakban, figyelembe véve hogy négy betűből van 2, a maradék ötből 1 darab.
b) A mássalhangzókat (hét darab) kezeljük egyféle elemnek (mint mássalhangzó), így számoljuk meg az ismétléses permutációk számát: $\frac{13!}{7!2!2!2!}$. Ezzel meghatároztuk a megfelelő szavakat, hiszen ha a mássalhangzók helyét kijelöltük, a sorrend miatt azt is tudjuk, hogy melyik helyre melyik kerül.

6.* 10 gyereknek kiosztunk 50 egyforma gesztenyét (mindet).
a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
b) És ha mindenkinek kell jusson?
c) És ha mindenki legalább kettőt kap?

Megoldásvázlat. a) Ismétléses kombináció (mivel a gesztenyék egyformák, csak az számít, ki mennyit kap; az nem, hogy konkrétan melyiket); a gesztenyéket tíz részre kell tagolni (minden gyerek a sorszámának megfelelő részt kapja), amihez kilenc pálcika (tagolójel) kell; tehát 50 gesztenyét és 9 tagolójelet kell sorrendbe rakni, amit $\frac{59!}{50!9!}$-féleképpen tehetünk meg; ezt úgy is mondhatjuk, hogy az 59 helyből kiválasztjuk a gesztenyék helyét, amit $\binom{59}{50}$-féleképp tehetünk meg. (Figyeljük meg, hogy a binomiális együttható fölső száma $59 = 10 + 50 - 1$, hiszen $10 - 1$ tagolójel és 50 gesztenye van a sorban.)
b) Adunk mindenkinek egy-egy gesztenyét (ez gond nélkül megtehető, mivel egyformák), majd a maradék negyvenet az előző gondolatmenettel analóg módon $\binom{10+40-1}{40}$-féleképp oszthatjuk ki.
c) Analóg módon $\binom{39}{30}$.

7. Hány olyan 6-jegyű szám van, melynek pontosan háromféle jegye van, mind páratlan, mindegyikből 2-2 darab?

Megoldásvázlat. $\binom{5}{3} \cdot \frac{6!}{2^3}$: az öt páratlan jegyből kiválasztjuk azt a hármat, ami szerepelni fog a számban, majd az immár fix készletet sorba rakjuk.

8.* Legfeljebb hány természetes szám adható úgy, hogy
a) semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 8-cal?
b) semelyik kettő összege ne legyen osztható 8-cal?
c) semelyik néhány összege ne legyen oszható 8-cal?

Megoldásvázlat. a) Legfeljebb 8-at. Két szám különbsége pontosan akkor osztható nyolccal, ha a nyolccal vett osztási maradékuk ugyanaz. A maradékok nyolcfélék lehetnek $(0, 1, \dots, 7)$, így kilenc számjegy esetén a skatulya-elv miatt biztosan lesz kettő, aminek ugyanaz a maradéka, tehát a különbségük osztható nyolccal. Másrészt nyolc számot meg lehet adni, pl $1, 2, \dots, 8$ megteszi.
b) Végtelen sokat. Vegyük a 8-cal osztva 1 maradékot adó számokat. Ezek páronkénti összege nem lesz 8-cal osztható, nyilván.
c) 7-et. Ennyit könnyű például úgy, hogy veszünk hét különböző számot, amik mind 1 maradékot adnak 8-cal osztva. Most belátjuk, hogy ennél többet nem lehet. Legyen 8 számunk $a_1, a_2, \dots a_8$. Képezzük a következő összegeket: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + ..a_7 + a_8$.
• ha van a 8 szám között olyan ami 8-cal osztható, kész vagyunk.
• ha nincs a 8 szám között olyan ami 8-cal osztható, akkor skatulya-elv szerint van kettő azonos maradékot adó, mert csak 7-féle 8-as maradék maradt a 8 számra. Akkor viszont a két szám különbsége mutat olyan összeget ami 8-cal osztható volt.

9. Hányféleképpen olvashatjuk ki a „zöldségleves” szót az alábbi táblázatokból szomszédos mezőkön lépkedve? (Az első táblázatnál keressünk közvetlen megoldást is.)

Z	Ö	L	D	S	É	G	L
Ö	L	D	S	É	G	L	E
L	D	S	É	G	L	E	V
D	S	É	G	L	E	V	E
S	É	G	L	E	V	E	S

Z	Ö	L		S	É		L
Ö	L	D	S	É	G	L	E
L		S		G	L	E	V
D	S	É	G	L	E		E
S	É	G		E	V	E	S

Megoldásvázlat. Kétféle megoldás: vagy lépéssorozatokat számolunk, vagy rekurzióval.
Mindig jobbra illetve lefele kell lépnünk. A kérdés az, hogy hányféleképpen juthatunk el így a bal fölső sarokból a jobb alsóba.
a) Minden kiolvasásnál hetet kell jobbra és négyet lefelé lépnünk, és az összes ilyen lépéssorozat jó kiolvasást ad; ezen lépéseknek $\frac{11!}{7!\cdot 4!} = \binom{11}{4}$-féle sorrendje van.
b) Vegyük észre, hogy minden mezőre vagy a fölötte, vagy a tőle balra levő mezőről érkezünk; így minden mezőre annyiféleképpen juthatunk, mint az előbb nevezett mezőkre való eljutási lehetőségek számának összege; ezzel kapunk egy rekurziót: ha a táblának a bal fölső sarkából indulva egy $n \times k$-as szeletét vesszük, és annak a jobb alsó sarkába való séták számát $s(n,k)$-val jelöljük, akkor a fenti esetszétválasztás alapján $s(n,k) = s(n-1,k) + s(n,k-1)$. Persze az $s(n,1)$ és az $s(1,k)$ esetek triviálisak. Ez alapján kitöltve a táblázatot az eljutási lehetőségek számával (az (n,k) mezőre $s(n,k)$-t írunk, lásd alább) a válasz 32 lesz. Ez a megoldás persze működik az a) részfeladatban is.

10.* Bizonyítsuk be hogy a Parlamentben dolgozik három olyan képviselő, akiknek megegyezik az életkora!

Megoldásvázlat: 199 képviselő van a magyar Parlamentben. A szóbajövő életkorok halmaza 18-tól 105-ig terjed. Skatulya elv miatt tehát 88 lehetséges életkorra (skatulyára) jut 199, vagyis több mint $2 \cdot 88$ képviselő (tárgy), így lesz olyan életkor ami minimum 3 embernél előfordul.