Véges matematika I. tanári gyakorlat

3. alkalom - megoldásvázlatok.

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

1. Mennyi ez:
a) $1 + 30 \cdot 3 + \binom{30}{2} \cdot 3^2 + \ldots \binom{30}{29} \cdot 3^{29} + \binom{30}{30} \cdot 3^{30}$
b) $2 + 30 \cdot 4 + \binom{30}{2} \cdot 2^3 + \ldots \binom{30}{29} \cdot 2^{30} + \binom{30}{30} \cdot 2^{31}$
c) $1 - 10 \cdot 4 + \binom{10}{2} \cdot 4^2 - \ldots + \ldots - \binom{10}{9} \cdot 4^9 + \binom{10}{10} \cdot 4^{10}$

Megoldásvázlat.
a) Binomiális tételt alkalmazunk. $(1+3)^{30}$. b) $2 \cdot (1+2)^{30}$. c) $(1-4)^{10}$.

2. Melyik nagyobb? $\binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \ldots + \binom{19}{18} + \binom{19}{19}$ vagy $\binom{20}{1} + \binom{20}{3} + \binom{20}{5} + \ldots + \binom{20}{17} + \binom{20}{19}$?

Megoldásvázlat.
Baloldal a 19. sor összege a Pascal háromszögben, mínusz $\binom{19}{0}$. Erről tanuétuk, hogy a binomiális tétel szerint az értéke $(1+1)^{19} - \binom{19}{0} = 2^{19} - 1$. (Vagy: kétszeres leszámolás, 19 elemű halmaz részhalmazai. Vagy: indukció.)
Jobboldal a 20. sor ptn indexű tagjainak sorösszege a Pascal háromszögben. Tanultuk, hogy a páros és ptn indexű tagjainak sorösszege a Pascal háromszögben ugyanannyi, mert a váltakozó előjelű összeg 0. (V.ö. $(1-1)^{20} = 0^{20}$) Ez azt jelenti, hogy a 20. sor ptn indexű tagjainak sorösszege a Pascal háromszögben annyi, mint a a 20. sor teljes sorösszegének a fele, 2^{19}.

3. Igazoljuk, hogy a Pascal-háromszögben ha váltakozó előjellel összeadjuk egy tetszőlegesen választott sorban az elemeket (a legelső egyelemű sor kivételével), akkor 0-t kapunk!

Megoldásvázlat. Páros elemszámú és páratlan elemszámú halmazok egyenlőségére való visszavezetés.
vagy: Binomiális tétel, $(1-1)^n = 0$ kibontása.
vagy: Pascal háromszög előző sorának elemeit felfedezni mindkét előjelű összegben. Lásd EA jegyzet

4. Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \tag{1}$$

és

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m} \tag{2}$$

Megoldásvázlat. Lásd: előadás-jegyzet. Teljes indukció m szerint, vagy kétszeres leszámolás: ennyiféleképp választhatunk ki $n+1$ gyereket a tornasorból, akik Coopert futnak. (baloldal: a legmagasabb kiválasztott gyerek szerint esetszétválasztás)
A b) részben elég használni, hogy $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$, és visszakapjuk az előző összeget.

5. Jelölje F_n az n. Fibonacci számot, ahol $F_1 = F_2 = 1$. Lássuk be hogy $n \geq 1$-re

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Megoldásvázlat. Teljes indukció. Lásd EA jegyzet.

6.* Lássuk be, hogy a Fibonacci számokra teljesül, hogy $F_{n+1} = F_{n-1}F_3 + F_{n-2}F_2$.
Lássuk be, hogy $F_{n+1} = F_{n-11}F_{13} + F_{n-12}F_{12}$.

Megoldásvázlat. Játsszunk azzal, hogy $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_n \cdot F_2 + F_{n-1} \cdot F_1$, figyelembe véve, hogy $F_1 = F_2 = 1$, majd a jobboldalon a legnagyobb indexű Fibonacci-számot bontsuk fel rekurzió szerint az előtte levő kettő összegére. Ha ezt ismételgetjük, akkor azt látjuk, hogy mindig

$$F_{n+1} = F_{n-k} \cdot F_{k+2} + F_{n-k-1} \cdot F_{k+1}$$

alakú kifejezéseket kapunk.
$k = 1$-re ez épp a bizonyítandó.
Általában ha a fenti lépést végrehajtjuk, akkor valóban ugyanilyen kifejezést kapunk csak k helyett $k+1$-gyel, vagyis indukcióval be tujdkuk látni hogy minden k-ra jó:

$$F_{n+1} = F_{n-k} \cdot F_{k+2} + F_{n-k-1} \cdot F_{k+1} = (F_{n-k-1} + F_{n-k-2}) \cdot F_{k+2} + F_{n-k-1} \cdot F_{k+1} = F_{n-k-1} \cdot F_{k+3} + F_{n-k-2} \cdot F_{k+2}.$$

Itt a 3. egyenlőség abból jött hogy persze $F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}$. Ez lesz az indukciós lépés, a kezdőlépés pedig az, hogy $k = 0$-ra amint láttuk, az állítás maga a rekurzív képlet, ami nyilván igaz.

7. 18 egyforma alakú, még színtelen karácsonyfadíszt szeretnénk megfesteni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha ötféle festékünk van?

Megoldásvázlat. Ismét azt kell megmondani, hogy melyik színűből mennyi díszt akarunk festeni, tehát $n = 5$ különböző dologhoz (színek) rendelünk számokat, összesen $k = 18$ összegűeket. Ezt tehát $\binom{5+18-1}{18} = \binom{22}{18}$-féleképp tehetjük meg. (Úgy is képzelhetjük, hogy boltban ötféle karácsonyfadíszt árulnak, és mi abból akarunk venni 18-at; az eredmény tekintetében mindegy, hogy festünk vagy vásárlunk.)

8. a) Hányféleképpen oszthatunk ki 10 diák között 15 papírlapot, ha mindenki legalább egyet kap?,
b) Mi a helyzet, ha nem papírlapokat, hanem különböző házifeladatokat jelölünk ki, szintén 15-öt, úgy hogy mindenki kapjon legalább egyet?

Megoldásvázlat. a) Először kiosztunk mindenkinek egyet (mivel egyformák, ez egyféleképpen történik), marad 5. Majd döntést hozunk, hogy a többit milyen leosztásban osszuk ki. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés lesz a kiosztások és az 5 gombócból, 9 pélcikából(elválasztó vonalból) álló jelsorozatok között. Utóbbiakat meg tudjuk számolni könnyen, $\binom{9+5}{5}$.
b) az a rossz eset, amikor van valaki, aki nem kap HF-et. Szóval 10-féle rossz esethalmaz van, és ezek össze is metszhetnek. A_i: i. diák nem kapott HF-et. H: összes kiosztás, megkötés nélkül. Ha t darab diákot kizárunk a HF-ekből mesterségesen, akkor $(10-t)^15$ kiosztás marad, hiszen minden HF $10-t$ diákhoz kerülhet. Ezzel felírhatjuk a szitaformulát: jó esetek száma $10^{10} - \binom{10}{9}9^{10} + \binom{10}{8}8^{10} - \ldots - \binom{10}{1}1^{10}$.

9. Három négytagú család szeretne egy kerek asztal köré telepedni úgy, hogy egy család tagjai egymás mellett üljenek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

Megoldásvázlat. A családokat ragasszuk össze egy-egy blokkba, ez $(4!)^3$ lehetőség, majd a három blokkot 2!-féleképpen ültethetjük az asztal köré, tehát a válasz $(4!)^3 \cdot 2$.
Másképp: Az első székre ülhet bárki a tizenkét főből; a mellette levő három széket a három családtagja 3!-féleképpen töltheti föl. Ez eddig $12 \cdot 3!$ lehetőség. A következő helyre ismét ülhet bárki, majd mellé a családja: $8 \cdot 3!$ lehetőség, majd a maradék négy ember 4!-féleképpen ülhet le a maradék négy helyre. Ez $12 \cdot 3! \cdot 8 \cdot 3! \cdot 4! = 6 \cdot (4!)^3$ lehetőség. Minden jó ülésrendet megszámoltunk és csak jókat számoltunk, no de hányszor? Egy „végeredményt” *háromszor* számoltunk (nem tizenkétszer! Három elforgatottját vettük mindegyiknek, mert csak olyan ülésrendeket számoltunk, ahol a családok az 1–4, 5–8, 9–12 helyeken ülnek, „átlógós” változatokat nem.), így a tehénszabály miatt $2 \cdot (4!)^3$ lehetséges ülésrend van.

10. Hány olyan húszjegyű szám van, amelyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?

Megoldásvázlat. Majdnem ismétléses permutáció: egy adott készletet (két db. 0, két db. 1, két db. 2 stb.) kell sorba rakni, ám az elején nem állhat nulla. Megkülönböztetve az azonos számjegyeket, majd a tehénszabályt alkalmazva az eredmény $\frac{18 \cdot 19!}{2^{10}}$
Másképp: Ha nem vennénk figyelembe a 0-val kezdésre vonatkozó tiltást, nyilván $\frac{20!}{2^{10}}$ lenne a válasz. Ebből kivonjuk a rossz eseteket, amikor 0-val kezdtünk, az ilyenek száma $\frac{19!}{2^9}$.

11.* Egy trafikban tízféle nyalóka és ötféle cukorka kapható.
a) Róka Rudolf 6 különböző nyalókát szeretne vásárolni, és talán még megkóstol néhányféle cukorkát (a kóstoláshoz fajtánként egy-egy szem elegendő). Hányféleképpen alakulhat a vásárlás? (Az számít, hogy

végül miket vásárolt, a sorrend pl. nem.)
b) Róka Rudolf később mindegyik fajta cukorkából két-két darabot vásárolt, és úgy döntött, hogy szétosztja őket öt barátja között. Hányféleképpen adhatta oda a cukorkákat, ha senkinek nem adott két egyformát? (Más megkötés nincs.)

Megoldásvázlat. a) A nyalókáknál 10 különbözőből 6 különbözőt kell kiválasztani, amit $\binom{10}{6}$-féleképpen tehetünk meg; az ötféle cukorkafajtának ettől függetlenül tetszőleges részhalmazát választhatja, ami 2^5 lehet. Az eredményt szorzással kapjuk (független döntések), tehát a válasz $\binom{10}{6} \cdot 2^5$.
b) A cukorkák felől nézve: mindegyik típusból a két cukorkát két különböző embernek kell adjuk, tehát minden típusnál ki kell választanunk azt a két embert, aki kapja a két cukorkát; ez típusonként függetlenül $\binom{5}{2}$ lehetőség, összesen tehát $\binom{5}{2}^5$.

12. Egy édesipari vállalat kínálatában nyolcféle különböző bonbon található, melyek közül négy szögletes, négy pedig kerek alakú.
a) A vállalat ajándékcsomagjainak mindegyikébe 30 szem bonbont válogatnak a cég nyolcféle édességéből úgy, hogy minden fajtából legalább kettő kerüljön a zacskóba. Hányféle csomagot állíthatnak össze?
b) A cég termékmintáját egy kör alakú dobozban szervírozza, melyben körben helyezkedik el a nyolcféle desszertből egy-egy darab (középen nincs). Hányféleképpen rendezhetik el a bonbonokat a dobozban, ha szögletes és kerek bonbonok felváltva sorakoznak, és a forgatással egymásba vihető elrendezéseket azonosnak tekintjük?

Megoldásvázlat. a) $2 \cdot 8$ darabot berakunk a zacskóba, mindből 2-t. A folytatásban az számít, hogy melyikből hány kerüljön még bónuszban a zacskóba. Ez ismétléses kombináció újra: golyók a megmaradt bonbonok (14), pálciák felelnek meg a fajták elválasztásának (7). $\binom{21}{14}$
b) Rögzítsük az első kerek bonbon helyét. Innentől kezdve a maradék kerek bonbonok elhelyezése 3! módon történhet, a szögleteseké 4!; minden bonbon elhelyezése tehát $3! \cdot 4!$ módon valósulhat meg.

13. Hány olyan 10-betűs szó van, melyben 3 a, 5 b és 2 c szerepel, de a két c nincsen egymás mellett?

Megoldásvázlat. $\frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} - \frac{9!}{5!\cdot 3!}$: az összesből kidobjuk azokat, melyekben a két c egymás mellé kerül, amit ragasztással könnyű megszámolni.

14. A hatjegyű számokat csoportosítom aszerint, hogy melyik számjegyből mennyi szerepel bennük. (Pl. az 117777 és az 771177 ugyanabban a csoportban vannak, de pl. a 717171 másikban van.)
a) Hány csoport van összesen?
b) Mennyi számból áll az a csoport, amelyben a 757733 szám szerepel? És amiben a 101200?
c) Hány olyan csoport van, melyekben pontosan négyféle számjegyből álló számok vannak?

Megoldásvázlat.

a) Ismétléses kombináció (melyikből mennyi típus): a 10 számjegyből 6-ot választunk, tehát 6 gombóc és 9 pálcika van; viszont nincs olyan hatjegyű szám, melynek minden jegye nulla, így a válasz $\binom{15}{6} - 1$.
b) Ezeket a számjegyeket kell sorba rakni (ismétléses permutáció), tehát $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$. A második esetben nulla nem állhat az elején; eleinte megkülönböztetve az azonos számjegyeket, majd a tehénszabály szerint korrigálva a válasz $\frac{3\cdot 5!}{3!\cdot 2!}$.
c) Ezen csoportokat egyértelműen azonosítja az, hogy melyik négy számot használják, és melyiket hányszor. Kiválasztunk négy különböző számjegyet, majd azokból választunk ismétléssel úgy, hogy mindből legalább egyet vegyünk; tehát két szabad választásunk marad (két gombóc) a négy jegyhez (három pálcika). Így a megfelelő csoportok száma $\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{2}$.