Véges matematika I. tanári gyakorlat

4. alkalom - 2024. március 8.

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

Új témák: rekurziók, szitamódszer

1. a) A húsvéti nyúl tízféle csokitojásból szeretne összesen harminc darabot hozni úgy, hogy mindegyik fajtából kapjak legalább egyet. Hányféleképpen alakulhat meglepetés?
b)* Végül mindből három-három darabot kaptam. Ezt a harminc édességet szeretném négy különböző kosárba betenni úgy, hogy minden egyes kosárban csupa különböző fajta legyen, és egyik kosár se maradjon üresen. Hányféleképpen tehetem ezt meg? (A kosarakon belül nincsenek sorbarendezve a tojások, és az egyforma tojásokat értelemszerűen nem különböztetem meg.)

2. Hányféleképpen tehetünk be 20 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha
a) a virágok egyformák; **b)** a virágok egyformák és minden vázába kell jusson legalább egy;
c) a virágok különbözők; **d)** a virágok különbözők és minden vázába kell jusson legalább egy?

3. Igaz-e, hogy létezik két olyan különbözõ prímszám, amelynek azonos az utolsó 2023 számjegye?

4. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy piros?

5. Hányféleképpen fedhetünk le egy $2\times n$-es táblát 1×2-es dominókkal? (A dominók nem fedhetik át egymást és nem lóghatnak le a tábláról. A lefedéseknél a dominóknak csak az állása számít, nem a pöttyözésük)

6. Egy 4-oldalú dobókockával többször egymás után dobunk, amelyen a számok sorban $1, 2, 3, 4$.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 5 lesz?
b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 33 lesz? Írjunk fel rekurziót arra az a_n számra, ahányféleképpen a dobott számok összege néhány dobás után n lehet!

7. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$!
b)* $a_1 = 2$, $a_2 = 13$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$.

Egy $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ egyenlettel és az a_1, a_2 tagokkal megadott sorozat explicit képletét megkaphatjuk az alábbi lépésekkel.

1. Keresünk megoldást a rekurzióra mértani sorozatok közt: $x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}$. Átrendezve elég az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeit meghatároznunk.
2. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1}$ alakban keressük.
3. Ha $x_1 = x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1}$ alakban keressük.
4. A λ_1 és λ_2 értékeket az a_1 és a_2 kezdeti értékekhez igazítjuk (kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer).

8. 10 egyenes legfeljebb hány részre osztja fel a síkot?

9. Igazoljuk, hogy $k < n$ pozitív egészek esetén

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Javaslat: kombinatorikus úton, vagy algebrai úton is végiggondolhatjuk!

10. A Mikulásnak van 5-féle csokija, mindből 10 (egyforma) darab. Ezeket szeretné mind kiosztani 3 gyereknek úgy, hogy minden gyerek kapjon legalább egy csokit. Hányféleképpen oszthatja így ki?

11. Igazoljuk, hogy teljesül a következő:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^n.$$