Véges matematika I. tanári gyakorlat

5. feladatsor- megoldásvázlatok

1. 8 házaspár hivatalos egy partiba. Mivel nem ismerik egymást, mindenki mindenkivel kezet fog, a házastársát kivéve. Hány kézfogás történik?

Megoldásvázlat. Rendeljünk a problémához gráfot: csúcsok az emberek, élek a kézfogások. Ekkor a fokszámösszeg $16 \times (16-2)$, és a fokszámtétel alapján az élszám ennek a fele.
Másképp: A gráf élszámát könnyű megszámolni úgy, hogy levonjuk a teljes K_{16} gráf élszábából a hiányzó teljes párosítás éllszámát: $|E| = \binom{16}{2} - 8$.

2. 13 fős óvodás csoportban lehetséges-e, hogy mindenkinek a) 2 b) 3, c) 4 barátja van? (A barátságok kölcsönösek).

Megoldásvázlat. a) igen. Gráfos megfeleltetést nézve, bármilyen 2-reguláris 13 csúcsú példa mutatja hogy lehetséges. Minden 2-reguláris gráf diszjunkt körök uniója. Tehát esetünkben lehet C_{13}, vagy $C_3 \cup C_{10}$ pl.
b) nem lehet. Az összfokszám páratlan lenne, pedig a fokszámtétel szerint a fokszámösszeg páros, hiszen az élszám duplája.
c) Lehet. Vegyünk két éldiszjunk 13 csúcsú Hamilton kört, például; akár úgy, hogy összekötjük egy szabályos 13 szög csúcsai közül a szomszédosakat és a másodszomszédosakat.

3.* Rajzoljuk 3-reguláris gráfot minden $n \geq 4$ csúcsszám esetén, amikor létezik. Lehetséges-e, hogy találunk azonos csúcsszámú, de nem izomorf ilyen gráfokat? (Ha találunk, igazoljuk, hogy nem izomorfak.)

Megoldásvázlat. Ha n páratlan, fokszámtétel miatt nem lesz ilyen, mert a fokszámösszeg páratlan.
Ha páros, akkor találunk. Lehet pl szabályos n-szög oldalait és középpontján átmenő átlóit behúzva kapni ilyet. Vagy építhetünk diszjunkt 4 és 6 csúcsú példákból, K_4-ből és $K_{3,3}$-ból. Igazából 6-csúcsúból van több is, hiszen vehetünk két háromszöget, és összepárosíthatjuk élekkel a csúcsaikat, így 3 reguláris gráfot kapunk. Mivel ez nem páros gráf (hiszen van benne háromszög), a $K_{3,3}$-mal nem is lehet izomorf.
Átalában is könnyű páros gráfot mutatni akkor ha $n \geq 6$, és könnyű olyat konstruálni, amiben diszjunkt páratlan köröknek a csúcsai között csinálunk egy párosítást; arra figyelve, hogy egyik körbeli él se legyen párosításél. (Így pl pakolhatunk a gráfban páratlan kört, ami garantája hogy a kapott gráf nem lehet páros.

4. Van-e olyan egyszerû gráf, amelyben a pontok foka

a) $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$?
b) $6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1$?
c) $7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5$?
d) $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$?

Megoldásvázlat. a) igen, lehet rá konstrukciót rajzolni.
b) nem, fokszámösszeg páratlan, ami a Fokszámtéetl miatt nem realizálható (egyszerű) gráffal.
c) ez az a)belinek a komplementere. Ha a)-ra van jó példa, akkor itt is.
d) 7 csúcs van, köztük kettőre 6 a fokszám előírás. Ha ez teljesülne, akkor ők minden csúccsal össze lennének kötve. Másrészt van 1 fokszámú, az meg csak az egyikükkel lehet összekötve; ez tehát lehetetlen hogy egyszerre megvalósuljon.

5. Egy 6 pontú, egyszerû, összefüggõ gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?

Megoldásvázlat. Fokszámtétel miatt (fokszámösszegből adódóan) csak páratlan lehet, és persze legfeljebb 5, hiszen 6 csúcs van. Az 1 és az 5 lehetetlen a fokszámeloszlás miatt (lásd 4d), 3 lehetséges, van kosntrukció.

6. Tekintsük azt az 5-pontú gráfot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ csúcshalmazon, melynek éleit a következő halmaz adja meg:

a) $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{4,1\},\{4,2\}\}$
b) $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\}\}$
c) $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{5,1\},\{4,2\}\}$
Egyszerűek ezek a gráfok? Összefüggőek ezek a gráfok? Amelyik egyszerű, annak rajzoljuk meg a komplementerét.

Megoldásvázlat. a) nem egyszerű, mert van párhuzamos él $\{1,4\}$, és nem is összefüggő mert az $'5'$ izolást csúcs.
b) egyszerű, de nem összefüggő, most a $'4'$ az izolált csúcs.
c) egyszerű és összefüggő.

7. Adjunk példát olyan gráfokra, amelyek izomorfak a komplementerükkel. Igaz-e, hogy minden $n \geq 4$ esetén létezik ilyen példa?

Megoldásvázlat. 4 csúcsú út jó, 5 hosszú kör C_5 jó. 6-csúcsú példa nincs, mert ha G és komplementere izomorf, akkor persze ugyanannyi az élszámuk, és az élszámok összege $\binom{6}{2}$, de ez páratlan szám.

8. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van egy kör. Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2?

Megoldásvázlat. Ha minden pont foka legalább 2, akkor egy csúcsból elindulva mindig továbbléphetünk egy következő csúcsba úgy, hogy nem lépünk egyszer sem vissza élen. Mivel a gráf véges, ez csak akkor lehetséges, ha egyszer visszatérünk egy már meglátogatott csúcsba. Az első visszatérés egy kört határoz meg.
Ha minden fok 2, akkor az előző eljárás kört ad. Ha a gráf összefüggő, akkor kellett midnen csúcsban járnunk. Ha nem összefüggő, akkor így azt kapjuk hogy a gráf körök diszjunkt uniója.

9. Rajzoljuk le az összes legfeljebb 6 pontú fát!

Megoldásvázlat. Tipp: induljunk úgy, ahogy az előadáson tanultuk, hogy minden csúcsú fa előáll, mint (n-1)-csúcsú fa plusz egy belőle leágazó levél. Vagyis ha megvan az összes 2-pontú fa (1 db, P_2), akkor innen meglesz az össze 3-pontú (1 db, P_3), ahonnan látható kik lesznek a 4pontúak (2 db, P_4 és S_4), stb.

10.* Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. Azaz véges egyszerű gráfban mindig van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.

Megoldásvázlat. n lehetséges fokszám merül fel: $0, 1, 2, \ldots n-1$. Ha n csúcsú gráfban minden fok különböző, akkor az előző fokszámok mindegyikának elő kellene fordulnia. De ez lehetetlen, mert 0 és $n-1$ fokú csúcs egyszerre nem létezhet, az egyik kizárja a másikat.

11. Béni bácsi minden nap meglepi magát a cukrászdában (amíg van pénze), attól a naptól kezdve hogy megjön a nyugdíja. Az alábbiak közül választ mindig egyet: krémes (500 Ft), trüffeltorta (1000 Ft), Dobostorta (1000 Ft).

Hányféleképpen költheti így el 15000 forintos nyugdíját?

Megoldásvázlat. Az előzőhöz hasonlóan. Legyen a_n jelentése: $n \cdot 500$ forint elköltési módjai az egymást követő napokon. Pl $a_1 = 1$, mert ekkor csak egy lehetősége van, első nap egy krémes. $a_2 = 3$, mert lehet első nap T vagy D, vagy első két nap K. Mi a_{30}-at keressük. Felírhatjuk a rekurziót aszerint, hogy mi az első napi vétel: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ a három esetet összegezve (K, T, D sütik vétele, vagyis a megmaradó pénzösszeg 500, 1000, ill. 1000 Ft-tal csökken. Innen ugyanígy kar. egyenlet, gyökökből mértani sor kvóciensek származnak, majd megoldóképlet)

12. Hány olyan pozitív egész szám van 2023-ig, amelyik a $3, 4$ és 5 számok közül
a) legfeljebb kettőnek többszöröse?
b) egynek sem többszöröse?

Megoldásvázlat. Legyen $A(k)$ halmaz a 2023-nál nem nagyobb pozitív egészek közül azon számok halmaza amik oszthatóak k-val. Ekkor nyilván $|A(k)| = \lfloor 2023/k \rfloor$. Sőt, azt is tudjuk, hogy $|A(k) \cap A(\ell)| = A(k \cdot \ell)$ ha k és ℓ relatív prímek.
a) Nekünk ez kell: $|A(1) \setminus A(60)| = 2023 - \lfloor 2023/60 \rfloor$ Hiszen a rossz eset az ha mindháromnak többszöröse.
b) Nekünk ez kell: $|A(1) \setminus (A(3) \cup A(4) \cup A(5))\,|$. Szitálunk, mert az uniók helyett a metszetet tudjuk jól számolni.
$|A(1) \setminus [A(3) \cup A(4) \cup A(5)]| = 2023 - |A(3)| - |A(4)| - |A(5) + |A(3 \cdot 5)| + |A(3 \cdot 4)| + |A(4 \cdot 5)| - |A(3 \cdot 4 \cdot 5)|$

13.* A Matematikus Hangversenyen 16-an lépnek fel. Bár a fellépési sorrendet előre kinyomtatták, műsorközlő kitaláta, hogy senkit sem akkor szólít, amikorra a műsorközlő füzet szerint jönnie kellene. Hányféleképpen variálhatja meg az eredeti sorrendet?

Megoldásvázlat. Ez ugyanaz mint a fixpontmentes permutáció, $n = 16$-ra. 16 rossz eset van, amik összemetszenek: ha az i. ember mégis az i. helyen kerül sorra. Ezek unióját kell az összes esetből kivonni, vagyis megint szitálunk. Ha rögzített k darab emberre igaz, hogy ők mind a saját helyükön kerültek sorra, akkor a többiek sorrendje még $(16-k)!$ féle lehet. Innen az eredmény $\sum_{k=0}^{16}(16-k)!(-1)^k\binom{16}{k}$.

14. Lássuk be a következõ összefüggést:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}$$

Megoldásvázlat. Mese, kétszeres leszámolással: n Mókus csoportos és m lepke csoportos óvodás között osztunk ki k palacsintát, mindenki max 1-et kap. hányféleképp lehetséges? Jobboldalon kiválasztjuk az összes ovisból a palacsintázókat, bal oldalon esetszétválasztás aszerint, hogy a lepke csoportból hányan kapnak.

15. Egy dobozban 15 cédula van, 1-től 15-ig számozva. Kihúzunk sorban 5 cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben lesz a kihúzott számok mindegyike 5-nél nagyobb?

Megoldásvázlat. 10 szám jön szóba, amik közül kell visszatevés nélkül sorban ötöt: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Másképp: kiválasztjuk melyik ötöt húzzuk ki közülük, de számít a sorrend úgyhogy sorba is kell rendeznünk: $\binom{10}{5} \cdot 5!$

16. A húsvéti nyúl lepakolt egy fészekalja tojást a sík egész (x, y) rácspontjai egyikére. Elárulta, hogy $1 \le x \le 3$ és $2 \le y \le 6$. Hány barkochbakérdésből lehet kitalálni a helyét, ha nincs kedvünk keresgélni?

Megoldásvázlat. Csábító lehet azt gondolni, hogy $2 < 3 \le 4$, $4 < 5 \le 8$, vagyis az x koordináta kitalálásához kell 2 kérdés, az y koordinátához 3 kérdés, összesen 5 kérdés.
Ez a kérdésszám elegendő valóban, természetesen. De végső soron 15 mező egyikét kell kitalálni, és $8 < 15 \le 16 = 2^4$, vagyis 4 kérdés a minimális kérdésszám.