Véges matematika I. tanári gyakorlat

6. feladatsor - 2024. április 19.

1. Definíció. *A G gráfot **fá**nak nevezzük, ha összefüggő és körmentes. Ha G körmentes, akkor **erdő**nek nevezzük (hiszen komponensei fák).*
A G gráf F részgráfját G feszítő fájának nevezzük, ha F fa és csúcshalmaza G minden csúcsát tartalmazza.

1. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább n. Mutassuk meg, hogy G összefüggõ!

2. a) Legyen $n > 1$, és G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $2n^2$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?
b) Legyen $n > 1$, G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $4n^2 - 6n$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?
c) Legyen $n > 1$, G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $4n^2 - 6n + 4$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?

3.* Egy körmérkőzéses sakkversenyen 27-en indultak. Lehet-e olyan pillanat, amikor mindenki 9 ellenfélen van túl? Lehet-e olyan pillanat, amikor mindenki 24 ellenfélen van túl?

4. Rajzoljuk fel azt a gráfot, amelynek csúcsai az $\{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazai, és amelyben két csúcsot akkor köt össze él ha a nekik megfelelő részhalmazok egyike a másikat tartalmazza.
a) milyen hosszú a legrövidebb séta $\{1, 2\}$ és $\{1, 3\}$ között?
b) milyen hosszú a leghosszabb út ebben a gráfban?
c) milyen hosszú a leghosszabb séta?
d) van-e négy, öt, ill. hat hosszú kör ebben a gráfban?

5. Igazoljuk, hogy egy n csúcsú egyszerû összefüggõ gráf akkor és csak akkor fa, ha $n - 1$ éle van!

6. Igazoljuk, hogy ha egy fában van k-adfokú pont, akkor legalább k db elsõfokú pont van benne!

7.* Igazoljuk, hogy ha egy fában van két 8-adfokú pont és három 3-adfokú, akkor legalább 17 db elsõfokú pont van benne!

2. Definíció. *Egy G gráfbeli **sétát Euler-sétá**nak nevezünk, ha G **minden élét egyszer használja**.*
*Egy G gráfbeli **körsétát Euler-körsétá**nak nevezünk, ha G **minden élét egyszer használja**.*
*Ha egy séta nem körséta, akkor **nyílt sétá**nak hívjuk.*

1. Tétel. *Tegyük föl, hogy $G = (V, E)$ összefüggő gráf. Ekkor*
(1) *G-ben van Euler-körséta $\iff$ minden csúcs foka páros;*
(2) *G-ben van nyílt Euler-séta $\iff$ pontosan két páratlan fokú csúcs van.*

8. Mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely tartalmaz Euler-körsétát, páros sok pontja és páratlan sok éle van!

9. Legalább hányszor kell felemelni a ceruzát a $K_{5,6}$ teljes páros gráf lerajzolásakor?

10. Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben van Euler-körséta, és a csúcsok fokszámainak összege 34?

11. Az F fának 17 csúcsa van, és bármely csúcsának fokszáma 1 vagy 4. Határozzuk meg, legalább hány élt kell F-be behúzni ahhoz, hogy a keletkezõ gráfnak legyen Euler-körsétája!