

Véges matematika I. tanári gyakorlat

7. feladatsor - 2024. április 26.

1. Definíció. A G gráfban egy részgráf Hamilton kör, ha olyan körgráf, ami G minden csúcsát tartalmazza.

1. Tétel (Elégséges feltétel Hamilton kör létezésére, Dirac). Ha egy $n > 2$ csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.

2. Tétel (Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére). Ha egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból k csúcsot kitörünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb k komponense van.

1. Csoportfeladat: kapsz egy számot: , és cél, hogy a csoportban összesen pontosan ennyi emberrel csapjad össze a kezed (high five). Csoportcél, hogy ezt az egyéni célt minél többen elérjék.

2. Csoportfeladat: kapsz egy számot: , és cél, hogy a csoportban összesen pontosan ennyi embert győzz le kő-papír-ollóban. Csoportcél, hogy ezt az egyéni célt minél többen elérjék.

Hogyan kapcsolódik ez a két feladat gráfokhoz? Egyértelmű a feladatokat leíró gráf? Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie, milyen stratégiát érdemes követni?

3. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G -ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?

4. Egy sakktáblát szeretnénk lóugrásban bejárni úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk. Lehetséges-e ez, ha a tábla

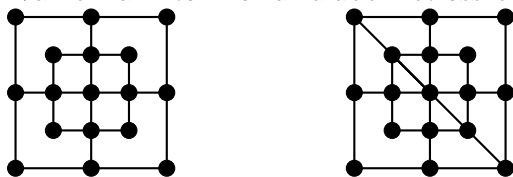
a) 4×4 -es;

b) 5×5 -ös;

c) 5×5 -ös, és azt is megköveteljük, hogy az utolsó lépésben visszatérhessünk a kiindulási mezőre?

5. Van-e olyan 6 pontú, 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben nincs Hamilton-kör?

6.* Van-e Hamilton-kör az alábbi két összefüggő gráfban?



7. a) Egy 100 csúcsú gráfban minden pont foka legalább 75. Bizonyítsuk be, hogy legalább 12 éldiszjunkt Hamilton-kör van benne! b) Mennyi Hamilton-kör van egy $K_{n,n}$ gráfban?

8. Mutassunk példát olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráfra, amelyben nincs Hamilton-út!

9.* Tádé rajzol egy 20-csúcsú T fát. Töhötöm szeretné kiegészíteni pár éllel, hogy az így kapott gráfban legyen Hamilton-kör. Milyen k egész számra igaz, hogy lehetséges, hogy Töhötömnek a fagrafhoz k élet kell hozzáadnia ehhez? (vagyis ennyi él elég, kevesebb nem elég)