Véges matematika I. tanári gyakorlat

6. feladatsor - 2024. megoldásvázlatok

1. Definíció. *A G gráfot **fá**nak nevezzük, ha összefüggő és körmentes. Ha G körmentes, akkor **erdő**nek nevezzük (hiszen komponensei fák).*
A G gráf F részgráfját G feszítő fájának nevezzük, ha F fa és csúcshalmaza G minden csúcsát tartalmazza.

1. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább n. Mutassuk meg, hogy G összefüggõ!

Megoldásvázlat. Indirekt: ha nem lenne összefüggő, akkor több komponensből állna, a legkisebb komponens mérete legfeljebb n. Ebben minden csúcs legfeljebb $n-1$ csúccsal lehet összekötve, vagyis a fokszámok nem lehetnek mind legalább n értékűek, ellentmondás.

2. a) Legyen $n > 1$, és G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $2n^2$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?
b) Legyen $n > 1$, G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $4n^2 - 6n$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?
c) Legyen $n > 1$, G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok összege $4n^2 - 6n + 4$. Biztos-e hogy a gráf összefüggő?

Megoldásvázlat. Akkor tudjuk hogy biztosan összefüggő, ha lehetetlen volna hogy nem összefüggő. Két észrevételen múlik az összes feladat:
(i) ha egy N csúcsú egyszerű gráfból kevesebb mint $N-1$ él hiányzik, vagyis legalább $\binom{N}{2} - N + 2$ éle van, akkor ÖF.
(ii) ha egy N csúcsú egyszerű gráfból legalább $N-1$ él hiányzik, vagyis legfeljebb $\binom{N}{2} - N + 1$ éle van, akkor lehet nem összefüggő.
(i) magyarázata: ha nem lenne összefüggő, akkor vegyünk egy komponenst ami $k < N$ csúcsú, és számoljuk meg, hány él hiányzik a gráfból. Legalább $k(N-k)$, amennyi olyan csúcspár van aminek egyik csúcsa a komponensben van, másik nincs. $\min_k k(N-k) = 1 \cdot (N-1)$.
(ii) magyarázata: vegyünk egy $k = N-1$ méretű komponenst és egy izolált csúcsot. Ez nem ÖF, és ennek $\binom{N-1}{2} = \binom{N}{2} - N + 1$ éle van. Ebből tetszőlegesen elhagyva éleket, továbbra is nem ÖF gráfot kapunk.
Ez alapján: a) $n = 2$ biztos, különben lehet nem ÖF, b) lehet nem ÖF, c) biztos ÖF

3.* Egy körmérkőzéses sakkversenyen 27-en indultak. Lehet-e olyan pillanat, amikor mindenki 9 ellenfélen van túl? Lehet-e olyan pillanat, amikor mindenki 24 ellenfélen van túl?

Megoldásvázlat. Fokszámtétel a sakkpartik által meghatározott gráfra: lehetetlen hogy ptn sok ptn fokszám legyen. Emiatt lehetetlen hogy 27 9-es fokszámot találjunk. Az lehet hogy minden fokszám 24, hiszen ez azt jelenti, hogy egy 2-reguláris gráf a komplementer. Ilyen létezik. (pl. C_{27})

4. Rajzoljuk fel azt a gráfot, amelynek csúcsai az $\{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazai, és amelyben két csúcsot akkor köt össze él ha a nekik megfelelő részhalmazok egyike a másikat tartalmazza.
a) milyen hosszú a legrövidebb séta $\{1, 2\}$ és $\{1, 3\}$ között?
b) milyen hosszú a leghosszabb út ebben a gráfban?
c) milyen hosszú a leghosszabb séta?
d) van-e négy, öt, ill. hat hosszú kör ebben a gráfban?

Megoldásvázlat. a) nem tartalmazóak, de az $\{1\}$-et mindketten tartalmazzák, vagyis kettő hosszú séta a minimális
b) van minden csúcson áthaladó út (Hamilton út), vagyis 8 csúcsú, 7 hosszú.
c) végtelen hosszú
d) van mind.

5. Igazoljuk, hogy egy n csúcsú egyszerû összefüggõ gráf akkor és csak akkor fa, ha $n-1$ éle van!

Megoldásvázlat. Azt a fanövesztés algoritmusából láttuk, hogy minden fának $n-1$ éle van (mert megkapható $n-1$ lépésből, amikor egy új levelet ragasztunk, kiindulva az egycsúcsú gráfból). A másik irányhoz az kell, hogy $n-1$ élű összefüggő gráf szükségképpen körmentes. Nos, ha nem volna az, akkor el lehetne belőle hagyni néhány élet, hogy még összefüggő, de körmentes gráfot kapjunk (ha tetszik, vehetnénk a gráf egy feszítőfáját, ami valódi részgráf volna, nem egyezne meg az eredeti gráffal). De ekkor a feszítőfának kevesebb mint $n-1$ éle volna ami ellentmondás.

6. Igazoljuk, hogy ha egy fában van k-adfokú pont, akkor legalább k db elsõfokú pont van benne!

Megoldásvázlat. Nézzük a fokszámösszeget. Ha legfeljebb $k-1$ levél volna, akkor a fokszámösszeg legalább ennyi volna: $k-1+k+2(n-k)$ mivel ekkor a k-fokú csúcs mellett kell lennie legalább $n-k$ legalább 2-fokú csúcsnak. De ez több mint $2n-2$, ami egy $n-1$ élű gráfban a fokszámösszeg lehet.

7.* Igazoljuk, hogy ha egy fában van két 8-adfokú pont és három 3-adfokú, akkor legalább 17 db elsõfokú pont van benne!

Megoldásvázlat. A fokszámösszeg $2n-2$ ha n csúcs a gráf. Ehhez hozzájárult két 8-as és 3 3-as fokszám, vagyis a maradék $n-5$ csúcson a fokszámösszeg $2n-2-16-9=2(n-5)-17$. Minden 17-tel tér el tehát az összeg attól, hogy a fokszámok átlaga 2 legyen, ezért kell legalább 17 elsőfokú csúcs - hiszen nulla fokú nem lehet benne.

2. Definíció. *Egy G gráfbeli **sétát Euler-sétá**nak nevezünk, ha G **minden élét egyszer használja**.*
*Egy G gráfbeli **körsétát Euler-körsétá**nak nevezünk, ha G **minden élét egyszer használja**.*
*Ha egy séta nem körséta, akkor **nyílt sétá**nak hívjuk.*

1. Tétel. *Tegyük föl, hogy $G=(V,E)$ összefüggő gráf. Ekkor*
(1) *G-ben van Euler-körséta $\iff$ minden csúcs foka páros;*
(2) *G-ben van nyílt Euler-séta $\iff$ pontosan két páratlan fokú csúcs van.*

Megoldásvázlat.

8. Mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely tartalmaz Euler-körsétát, páros sok pontja és páratlan sok éle van!

Megoldásvázlat. Ragasszunk össze egy 3 és egy 4 hosszú kört egy csúcsuknál. A kapott összefüggőgráfnak 6 csúcsa, 7 éle lesz, és persze minden fok páros szám, így van benne Euler körséta.

9. Legalább hányszor kell felemelni a ceruzát a $K_{5,6}$ teljes páros gráf lerajzolásakor?

Megoldásvázlat. Legalább 2-szer. Egy ceruzás lerajzolás egy sétákra való felbontásnak felel meg, amiben minden élen egyszer haladhatunk át. A páratlan fokú csúcsok séta kezdő vagy végpontjai kell hogy legyenek. 2-nél kevesebbszer nem lehet emiatt felemelni a ceruzát, mert a gráfban 6 páratlan fokú csúcs van, és minden összefüggő rajzolásnál legfeljebb kettőben tudunk kezdeni vagy befejezni sétát. 2 viszont elég: kössök össze piros színnel két diszjunkt páralan fokú csúcspárt. Ezeket a piros éleket a gráfhoz véve ÖF gráfot kapunk ahol max 2 ptln fokú csúcs van, vagyis ahol van Euler-séta (esetünkben nyílt). A piros élekhez érve a piros élet nem rajzoljuk meg hanem felemeljük a ceruzát.

10. Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben van Euler-körséta, és a csúcsok fokszámainak összege 34?

Megoldásvázlat. Igen, ahhoz hasonlóan konstruálhatunk ahogy 6/8-ban is találtunk. (Most a csúcsszám 10, az élszám 17).

11. Az F fának 17 csúcsa van, és bármely csúcsának fokszáma 1 vagy 4. Határozzuk meg, legalább hány élt kell F-be behúzni ahhoz, hogy a keletkezõ gráfnak legyen Euler-körsétája!

Megoldásvázlat. Euler-körséta létezéséhez az összefüggőség feltétele máris teljesül. F fokszámait is meg tudjuk mondani (és így a paritásaikat is, ami a másik feltételhez kell). Ha a levele van, b db 4-fokú csúcsa, akkor egyrészt $a+b=17$, másrészt a fokszámösszeg $2\cdot 16=a+4b$. Innen kapjuk, hogy F-nek biztosan $a=12$ levele van. Ezeket külön párokba rendezve kapunk 6 élet, amit hozzávéve már lesz benne Euler-körséta.
Ennél kevesebb él hozzávétele nem lesz elegendő, mert akkor maradna páratlan fokú csúcs a gráfban.