Véges matematika I. tanári gyakorlat

8. feladatsor - 2024. május 3.

1. Definíció. *Egy G gráf jó csúcs-színezése k színnel azt jelenti, hogy minden csúcsot kiszíneztünk a k szín valamelyikével, és bármely két szomszédos csúcs színe különböző.*
***A gráf színezési száma**, más néven **kromatikus száma** az a legkisebb k szám, ahány színnel létezik G-nek jó csúcsszínezése. $\chi(G)$-vel jelöljük.*
Egy adott színezés csoportokba osztja a csúcsokat a színek szerint, ezeket hívjuk színosztályoknak.

2. Definíció. *Egy G gráf jó élszínezése k színnel azt jelenti, hogy minden élet kiszíneztünk a k szín valamelyikével, és bármely két azonos csúcsra illeszkedő él színe különböző.*
***A gráf élszínezési száma**, más néven **élkromatikus száma** az a legkisebb k szám, ahány színnel létezik G-nek élszínezése. $\chi'(G)$-vel jelöljük.*
Egy adott színezés csoportokba osztja az élet a színek szerint, ezeket hívjuk színosztályoknak.

1. Mennyi a kromatikus száma a következő gráfoknak:
a) k hosszúságú kör;
b) k hosszúságú kör + egy él;
c) k hosszúságú kör komplementere?

2. Legyen G n csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy legfeljebb α olyan pontot lehet találni G-ben, melyek között egyetlen él sem megy. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha}$!

3. Bizonyítsuk be, hogy bármely egyszerű G gráfra az élek száma legalább $\binom{\chi(G)}{2}$!

4. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, ..., 25\}$ és (i, j) legyen pontosan akkor él, ha i és j relatív prímek. Mennyi G kromatikus száma?

5. Legyen a G gráf ponthalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_{128}\}$. A v_i és a v_j pontok között akkor és csak akkor van él, ha
a) az indexek közül a nagyobbikat a kisebbikkel elosztva kettőhatványt kapunk;
b) a kisebb index osztója a nagyobb indexnek.
Határozzuk meg G kromatikus számát!

1. Tétel (Hall). *A $G = (A \cup B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha **minden** $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.*

Azt a feltételt, hogy minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül, **Hall feltételnek** nevezzük.

6. Egy társaságban, amelynek 70 fiú tagja van, minden fiú 13 lányt ismer, minden lány pedig 14 fiút. Hány lány van a társaságban? Mutassuk meg, hogy létrehozhatók olyan fiú-lány párok, ahol minden lánynak jut pár, mégpedig valamelyik ismerőse!

7. $k = 2$ ill $k = 3$-ra konstruálj k-reguláris gráfot, aminek nincs teljes párosítása.

8. Legyen F egy 30 csúcsú fa, v pedig F egy tetszőleges csúcsa. Tegyük fel, hogy v-től 1,2,3 ill. 4 távolságra rendre 3,7,10 ill. 9 csúcs található. Bizonyítsuk be, hogy F-nek nincs teljes párosítása.

9. Tegyük fel, hogy az 50 csúcsú G gráfban van a csúcsoknak egy olyan 23-elemű részhalmaza, amely bármely élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza. Lehet-e G-ben teljes párosítás?

10. Mutassuk meg, hogy minden 101 csúcsú 6-reguláris egyszerű gráf élszínezási száma 7.