Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 1. feladatsor

Csúcs- és élszínezések

Definíció: Egy G gráf csúcsainak *jó csúcs-színezése* valahány színnel olyan, melyben nincs azonos színű pontokat összekötő él. Egy G gráf *kromatikus száma* $\chi(G)$ (ejtsd: khi, majdnem néma h-val) a legkisebb színszám, amellyel a csúcsait jól színezhetjük. Hasonlóan Egy G gráf éleinek *jó (él)-színezése* valahány színnel olyan, melyben nincs azonos színű élekre illeszkedő csúcs. Egy G gráf *élkromatikus száma vagy kromatikus indexe* $\chi'(G)$ a legkisebb színszám, amellyel a éleit jól színezhetjük.

Kapcsolódó tételek: Brooks, $\omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$, Vizing

1. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$, és legyen $\{i, j\}$ él pontosan akkor, ha $1 \le |i - j| \le 6$. Mennyi $\chi(G)$ és $\chi'(G)$?

2. Legyen $H = \{1, 2, \dots, 10\}$, V csúcshalmaz legyen H részhalmazainak halmaza, azaz $V = 2^H$, és legyen az élhalmaz $E = \{\{A, B\} \colon A \subsetneq B \text{ vagy } B \subsetneq A\}$, $G = (V, E)$. Mennyi $\chi(G)$?

3. Legyen G egyszerű, összefüggő, k-reguláris gráf: **a)** $k = 2$; **b)** $k = 3$. Igaz-e a) ill. b) esetben, hogy: G-ben van Hamilton-kör $\Leftrightarrow \chi'(G) = k$? Melyik implikációt tudjuk eldönteni?

4. Legyen G egy 100-reguláris, 613 csúcsú, egyszerű gráf. Mennyi $\chi'(G)$?

5. Mennyi G kromatikus száma, ha G csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$, és $\{i, j\}$ $(i \ne j)$ pontosan akkor él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$?

Párosítások

Definíció: Egy G gráf egy P élhalmazát *párosításnak* nevezzük, ha semely két P-beli élnek nincs közös végpontja. A P párosítás *lefedi* a csúcsok egy $A \subset V(G)$ részhalmazát, ha minden A-beli csúcsból indul P-beli él. Egy P párosítás *teljes*, ha minden csúcsból indul P-beli él.

Kapcsolódó tételek páros gráfokon: Hall (Hall-feltétel), Kőnig-Hall-Frobenius

6. Egy hattagú társaságban, ahol kölcsönösek az ismeretségek, mindenkinek három ismerőse van. Bizonyítsuk be, hogy a hat ember leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a vele szemben ülőt.
b) Hogyan tudjuk a feladatot általánosítani?

7. Tegyük föl, hogy egy G gráfból kitörlünk két csúcsot, mire az szétesik két darab három, egy db négy, és két db öt csúcsból álló komponensre. Lehet teljes párosítás G-ben? Általánosítsuk a megfigyelést!

8. (KöMaL K. 500.) Egy bálon öt fiú és öt lány szeretne táncolni a keringőben. Anna 160 cm, Bea 165 cm, Csilla 166 cm, Dóri 168 cm, Elvira 170 cm, míg Ferenc 166 cm, Gábor 168 cm, Hugó 169 cm, István 172 cm, János 178 cm magas. Hányféle párosításban táncolhatnak, ha minden lány csak nála magasabb fiúval táncolhat?

9. Egy $G = (A \cup B; E)$ egyszerű páros gráfról tudjuk, hogy az A-beli csúcsok fokai különbözőek és egyik sem nulla. Mutasd meg, hogy van A-t fedő párosítás!

10. Van-e teljes párosítás G-ben, ha G csúcsai a számok 1-től n-ig, és két csúcs között akkor van él, ha a számok relatív prímek?

11. (KöMaL Gy.2209.) Kiszínezhető-e egy kockás papíron 25 mező úgy, hogy mindegyiküknek
a) páros számú, és legalább 2 szomszédja;
b) páratlan számúszomszédja legyen kiszínezve?
(Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Beadható: 5), 11)