Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 2. feladatsor

Emlékeztető: *Hall-tétel:* A $G = (A \cup B; E)$ *páros* (*kétosztályú*) gráfban van A-t fedő párosítás $\iff$ *minden* $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N_G(X)| \geq |X|$, ahol $N_G(X) = \{v \in B \colon \exists u \in X, \text{ melyre } uv \in E\}$.

1. Egy társaságban a 70 fiú tag mindegyike 13 lányt ismer, minden lány pedig 14 fiút.
a) Hány lány tagja van a társaságnak?
b) Mutasd meg, hogy tudunk úgy fiú-lány párokat alkotni, hogy minden lány kapjon párt, mégpedig egy ismerősét!

2. Az óvodai ünnepélyen egy grafikusművész rajzokat készített a gyerekek egyes csoportjairól. Minden képen pontosan öt gyerek látható. Bizonyítsuk be, hogy ha minden gyerek legalább öt képen szerepel, akkor minden gyerek hazavihetett egy-egy olyan rajzot, melyen ő maga szerepel.

3. Tegyük fel, hogy $A_1, \ldots, A_{10}$ egy X alaphalmaz 3-elemű részhalmazai úgy, hogy X minden eleme pontosan három darab A_i-ben szerepel. Igazold, hogy **a)** X 10 elemből áll; **b)** X elemei sorbarakhatók úgy, hogy az i-edik elem benne van A_i-ben!

4. A $G = (V, E)$ gráfban legyenek az $A \subset V$ és $B \subset V$ diszjunkt csúcshalmazok. Tudjuk, hogy A minden csúcsának legalább 6 szomszédja van B-ben, és B minden csúcsának foka legfeljebb 4. Mutasd meg, hogy $|B| \geq \frac{3}{2}|A|$!

5. Legyen $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 16\}$, $B = \{-4, -3, -2, \ldots, 4\}$, $E = \{\{a, b\} \colon a \in A, b \in B, b^2 \geq a\}$. Mutasd meg, hogy a legnagyobb párosítás mérete $G = (A \cup B; E)$-ben 7.

6. Legyen egy nem feltétlenül egyszerű G páros gráfban a legnagyobb fokszám Δ. Mutasd meg, hogy G beágyazható egy (nem feltétlenül egyszerű) Δ-reguláris G' páros gráfba! (Azaz hozzávehetünk G-hez csúcsokat és éleket úgy, hogy a kapott G' gráfban minden csúcs foka Δ legyen.)

7. Bizonyítsd be, hogy páros gráfokra $\chi'(G) = \Delta(G)$ (élkromatikus szám = max. fokszám)!

8. Tegyük fel, hogy a $G = (A \cup B; E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és $\forall X \subset A$, $X \notin \{\emptyset, A\}$-ra $|N_G(X)| \geq |X| + 1$. Mutasd meg, hogy $\forall e \in E$-hez $\exists$ TP, melyben e szerepel!

9. Mutasd meg, hogy egy 20 elemű H halmaz minden 8 elemű A részhalmazához hozzárendelhetünk egy-egy különböző 9 elemű A' részhalmazt (azaz a hozzárendelés injektív), ami tartalmazza A-t!

10. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keress jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen!

11. Mutasd meg, hogy egy n csúcsú páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha a benne található legnagyobb üres részgráfnak $n/2$ csúcsa van.

12. Legyen G egy 10-reguláris, 45 csúcsú, egyszerű gráf. Mennyi a gráf élszínezési száma? Lehet-e a kromatikus száma 2? Lehet-e $\chi(G) = 3$?

13. Mennyi G kromatikus száma, ha G csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 100\}$, és $\{i, j\}$ $(i \neq j)$ pontosan akkor él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$?

14. Egy 15×15-ös mátrix minden sorában és oszlopában nyolc 1-es és hét 0 szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van a determinánsának nemnulla kifejtési tagja!

Teams-en beadható: 12, 13, 14. *Egyéni munka kéretik.*