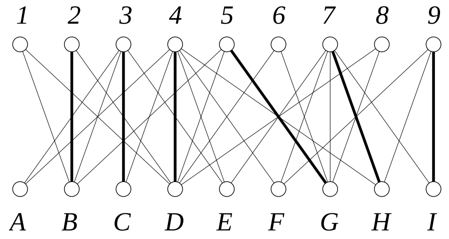
Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 3. feladatsor

1. Az alábbi ábrán a vastag élek egy P kiindulási párosítást jelölnek. A javító utak módszerével keress egy lehető legnagyobb párosítást a felső osztályból indulva. Ezután egy megfelelő deficitű halmazzal igazold azt is, hogy nincs nagyobb.



Emlékeztető: *Tutte tétele*: G-ben van TP $\Leftrightarrow$ G csúcsainak bármely S részhalmazát törölve a maradék gráfban legfeljebb $|S|$ páratlan csúcsszámú összefüggőségi komponens keletkezik.

2. Vegyük K_3-at. Ennek bármely csúcsát elhagyva két szomszédos csúcs marad, tehát nem keletkezik páratlan komponens; bármely két csúcsát elhagyva pedig csak egy csúcs marad. Így Tutte tétele szerint van K_3-ban teljes párosítás. Hol a hiba ebben az okoskodásban?

3. Tegyük föl, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráf 3-reguláris, és bármely élet elhagyva összefüggő marad. Mutassuk meg, hogy van G-ben teljes párosítás! (Tutte tételét szabad használni.)

4. Minden egész $k > 1$-re konstruálj k-reguláris gráfot, aminek nincs teljes párosítása.

5. Egy $n \times n$ méretű, nemnegatív valós számokat tartalmazó mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy a mátrix determinánsának van nem nulla kifejtési tagja!

Emlékeztető:
A G gráf legnagyobb teljes részgráfjának (klikkjének) méretét $\omega(G)$; legnagyobb független csúcshalmazának méretét $\alpha(G)$; legnagyobb független élhalmazának (azaz maximális párosításának) méretét $\nu(G)$; legkisebb lefogó csúcshalmazának méretét $\tau(G)$; legkisebb domináló csúcshalmazának méretét $\gamma(G)$; legkisebb lefedő élhalmazának méretét $\varrho(G)$ jelöli.

6. Határozd meg $K_{3,3}$-ban és a Petersen-gráfban a
a) legkisebb domináló ponthalmaz méretét (γ); **b)** legkisebb lefedő élhalmaz méretét (ϱ);
c) legnagyobb független ponthalmaz méretét (α); **d)** legnagyobb független élhalmaz méretét (ν);
e) legkisebb lefogó ponthalmaz méretét (τ); **f)** legnagyobb klikk méretét (ω)!

7. Legyen $V = \{1, ..., 100\}$, $E = \{\{i, j\} \subset V : |i - j| \in \{1, 2, 3\}\}$ és $G = (V, E)$. Határozd meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\varrho(G)$ gráfparamétereket!

8. Határozd meg az $\alpha(\overline{C_n})$, $\nu(\overline{C_n})$, $\tau(\overline{C_n})$, $\varrho(\overline{C_n})$ értékeket!

9. Legyen a G egyszerű gráf pontjainak halmaza $\{1, \ldots, 60\}$, és (i, j) pontosan akkor legyen él $(i \neq j)$, ha $i \cdot j$ osztható 6-tal. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\tau(G)$ és $\rho(G)$ értékeket!

10. Nézzünk rá a sakktáblára!
a) Hány huszár (ló) helyezhető el legfeljebb, hogy ne legyen kettő, amik egymást ütnék?
b) hány huszár helyezhető el legalább úgy, hogy minden mezőt ütés alatt tartsanak (amin épp nem állnak)? Adjunk alsó/felső becsléseket!
c) Mi köze ezen feladatoknak a gráfokhoz?

Beadható: 4,10