Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 4. feladatsor

1. Minden (M), néhány(N), vagy semelyik(S) gráfra sem igaz? (Bizonyíts, vagy adj példát, ellenpéldát!)

$\lvert V(G)\rvert = 20, \nu(G) = 12$	M	N	S	$\alpha(G) \geq \nu(G)$	M	N	S
G páros $\Rightarrow \alpha(G) \geq \Delta(G)$	M	N	S	$\varrho(G) \geq \alpha(G)$	M	N	S
$\alpha(G) \geq 2$	M	N	S	$\nu(G) = \tau(G)$	M	N	S
$\varrho(G) \geq \tau(G)$	M	N	S	G fa $\Rightarrow \nu(G) = 1$	M	N	S
$\varrho(G) \geq \lvert V(G)\rvert/2$	M	N	S	G páros $\Rightarrow \alpha(G) = \varrho(G)$	M	N	S

2. Mutasd meg, hogy G páros gráf $\Rightarrow 2\alpha(G) \geq |V(G)|$. Igaz-e az állítás megfordítása?

3. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges egyszerű $G = (V; E)$ gráfra $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$. Mutass példákat, ahol egyenlőség teljesül!

4. Mutasd meg, hogy egyszerű G gráfokra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.

5. Egy G gráfban mohón kerestünk egy tovább nem bővíthető P párosítást. Igazold, hogy $|P| \leq \nu(G) \leq 2|P|$, azaz a mohó eljárás nem rugaszkodhat el akármennyire a lehetséges legjobb eredménytől! Állíthatunk hasonlót, ha mohón keresünk független ponthalmazt?

6. Bizonyítsd be, hogy **a)** $\tau(G) \cdot \Delta(G) \geq |E(G)|$; **b)** ha G-ben nincs izolált csúcs, akkor $\tau(G) \cdot (\Delta(G) + 1) \geq |V(G)|$.

7. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű G gráfban $2\nu(G) + \alpha(G) \geq |V(G)|$!

8. Bizonyítsd be, hogy hurokélmentes $G = (V; E)$ gráfban $\nu(G) \cdot \chi'(G) \geq |E(G)|$!

9. Igazoljuk, hogy minden $r \in [1; 2]$ racionális számra létezik olyan G gráf, hogy $r = \frac{\tau(G)}{\nu(G)}$.

10. Egy egyetemi kurzus bármely négy résztvevője között van olyan, aki a másik három mindegyikével már máskor is találkozott. Bizonyítandó, hogy bármely négy résztvevő között olyan is van, aki már az összes társával találkozott.(Kürschák verseny, 60-as évek, OKTV 1. forduló, 2000-es évek)

11. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel. Kürschák-verseny, 70-es évek)

Teams-en beadható: 2, 8., 9. 11. *Egyéni munka kéretik.*