Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 4. feladatsor

1. Minden (M), néhány(N), vagy semelyik(S) gráfra sem igaz? (Bizonyíts, vagy adj példát, ellenpéldát!)

$\lvert V(G)\rvert = 20, \nu(G) = 12$	S	
$\alpha(G) \geq \nu(G)$	N	ha G páros, akkor mindig
G páros $\Rightarrow \alpha(G) \geq \Delta(G)$	M	
$\varrho(G) \geq \alpha(G)$	N	vesd össze a Gallai tétellel és a második kérdéssel
$\alpha(G) \geq 2$	N	
$\nu(G) = \tau(G)$	N	nem minden gráf páros... Kőnig-t csak azokra vonatkozik.
$\varrho(G) \geq \tau(G)$	N	
G fa $\Rightarrow \nu(G) = 1$	N	
$\varrho(G) \geq \lvert V(G)\rvert/2$	M	
G páros $\Rightarrow \alpha(G) = \varrho(G)$	M	már amennyiben nincs izolált csúcs (és így Gallai-t működik)

Megjegyzés: segít, ha a Gallai tételt észben tartod; így lényegében két gráfparaméter viszonyát elég jól megérteni, mert a másik kettő ezekkel kifejezhető. Hasznos magunk előtt látni a kézenfekvő példákat is: körök, utak, teljes és teljes páros gráfok, ahol a választ jól ismerjük.

2. Mutasd meg, hogy G páros gráf $\Rightarrow 2\alpha(G) \geq |V(G)|$. Igaz-e az állítás megfordítása?
Megoldás. A nagyobbik csúcsosztály a csúcsok felét legalább tartalmazza. Visszafelé nyilván nem igaz: vegyünk sok izolált csúcsot meg a háromszöget.

3. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges egyszerű $G = (V; E)$ gráfra $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$. Mutass példákat, ahol egyenlőség teljesül!
Megoldás. Számoljuk meg a csúcsokat egy minimális színszámot alkalmazó jó színezésben. Mivel minden színosztály független, a baloldal felülről becsül, a jobboldal pontos értéket ad. A teljes gráfok jó példák.

4. Mutasd meg, hogy egyszerű G gráfokra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.
Megoldás. Egy maximális független csúcshalmaz végpontja biztosan lefogó ponthalmazt alkotnak, hiszen nem lehet további független él.

5. Egy G gráfban mohón kerestünk egy tovább nem bővíthető P párosítást. Igazold, hogy $|P| \leq \nu(G) \leq 2|P|$, azaz a mohó eljárás nem rugaszkodhat el akármennyire a lehetséges legjobb eredménytől! Állíthatunk hasonlót, ha mohón keresünk független ponthalmazt?
Megoldás. Az első rész triviális, hiszen ha $|P|/2$-nél kisebb lenne a max párosítás, az azt jelentené, hogy a P végpontjai minden élét lefogják. De $\tau \geq \nu$.
Független ponthalmazra nyilván nincs analóg állítás, mert pl ha G egy csillag, és pechnesen épp a centrumát választjuk első csúcsnak, akkor nincs tovább, holott $n - 1$ méretű független ponthalmaz is lenne.

6. Bizonyítsd be, hogy **a)** $\tau(G) \cdot \Delta(G) \geq |E(G)|$; **b)** ha G-ben nincs izolált csúcs, akkor $\tau(G) \cdot (\Delta(G) + 1) \geq |V(G)|$.
Megoldás. Van $\tau(G)$ csúcs, ami minden élt lefog; ezek mindegyikéből legfeljebb $\Delta(G)$ él indulhat. Így minden élet legalább egyszer számoltunk meg.
Egy lefogóbeli csúcs saját magán kívül még max $\delta(G)$ csúcsot lát; és minden csúcsot lát valamelyik, mert nincs izolált pont.

7. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű G gráfban $2\nu(G) + \alpha(G) \geq |V(G)|$!
Megoldás. Közvetlenül következik a 4. feladatból és a Gallai tételből. $(\alpha + \tau = n)$

8. Bizonyítsd be, hogy hurokélmentes $G = (V; E)$ gráfban $\nu(G) \cdot \chi'(G) \geq |E(G)|$!
Megoldás. V.ö. a 3. feladattal, ugyanaz a gondolatmenet.

9. Igazoljuk, hogy minden $r \in [1; 2]$ racionális számra létezik olyan G gráf, hogy $r = \frac{\tau(G)}{\nu(G)}$.

Megoldás. Közvetlen konstrukció adható például (1) néhány háromszög és él diszjunkt uniójából; vagy (2) egy nagy klikkből kivett kisebb klikk segítségével. (1) esetén a háromszögek és élek számának paraméterét (ill ezek arányát) kell jól választani, (2) esetében a nagy és kicsi klikk méretét. Másik gondolatmenet: naív eljárást megfigyelek. Egyesével veszek be éleket és egy q élű teljes párosításból indulok ki, majd addig csinálom amíg teljes gráfot nem kapok. Ekkor a tört nevezője változatlan, számlálója meg vagy változatlan, vagy eggyel nő. (Állapotfüggvény módszere). Így minden egész értéket felvesz, amíg a kezdeti $\tau = q$-tól a végállapotbeli $\tau = 2q - 1$-ig eljut. Az hogy τ lehet dupla annyi mint ν, a K_3 megmutatja.

10. Egy egyetemi kurzus bármely négy résztvevője között van olyan, aki a másik három mindegyikével már máskor is találkozott. Bizonyítandó, hogy bármely négy résztvevő között olyan is van, aki már az összes társával találkozott.(Kürschák verseny, 60-as évek, OKTV 1. forduló, 2000-es évek)

11. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel. Kürschák-verseny, 70-es évek)