Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 6. feladatsor

1. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 2k\}$. A v csúcsból pontosan akkor vezessen irányított él a w csúcsba, ha $v < w$. A (v, w) él kapacitása legyen 1, ha v páratlan, és 2, ha v páros. Mennyi az 1-ből a $2k$ csúcsba vezető maximális folyam értéke?

2. Tegyük fel, hogy a G gráfban a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?

3. Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. Ezt úgy szeretné megoldani, hogy a hét minden napján különböző utcákon menjen át, azaz munkába menet egy hét alatt minden utcán legfeljebb egyszer menjen végig. Adjunk olyan algoritmust, amely a város térképe alapján eldönti, hogy ez megtehető-e!

4. A $2k + 1$ pontú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k + 1$. Mennyi lehet $\nu(G)$ értéke?

5. Egy szigeten n törzs él, akik földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon belőle. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Így minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Bizonyítsuk be, a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része!

6.* Legyenek egy gráf pontjai a 3 hosszúságú 0-1 sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Határozzuk meg a maximális folyam értékét $s = (0, 0, 0)$ és $t = (1, 1, 1)$ között!

7. Egy teljes gráf éleit tetszőlegesen megirányítottuk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráfban biztosan található olyan csúcs, ahonnan bármelyik másik csúcs elérhető legfeljebb 2 hosszú irányított úton!

8. Tegyük fel, hogy G egy k-szorosan összefüggő gráf. Adjunk G-hez egy új v pontot, majd kössük össze v-t a G gráf k különböző pontjával. Igazoljuk, hogy a kapott G' gráf is k-szorosan összefüggő!

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan összefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is! Mit mondhatunk egy k-szorosan élösszefüggő gráf (pont)összefüggőségéről?

10. Adjunk példát olyan gráfra, amely egyszerre teljesíti a következő tulajdonságokat: összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő; 2-szeresen élösszefüggő, de nem 3-szorosan élösszefüggő; továbbá a minimális fokszáma pontosan 4.

11. Hányszorosan pont-, illetve élösszefüggő a kocka élei által alkotott gráf? (A gráf csúcsai a kocka csúcsai, élei pedig a kocka élei.) Hányszorosan pont-, illetve élösszefüggő a Petersen-gráf?

12. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pont-, illetve élösszefüggő!

13. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő 2-reguláris gráf összefüggőségi és élösszefüggőségi száma megegyezik! Igaz-e az állítás 3-, illetve 4-reguláris gráfokra?

14.* Legfeljebb hány élét lehet elhagyni a K_{10} gráfnak úgy, hogy a megmaradt gráf még négyszeresen élösszefüggő legyen?

15. Legyen $1 < k < n$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű összefüggő gráfban minden pont foka legalább $(n + k - 2)/2$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő!

16. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy k-reguláris, egyszerű, összefüggő páros gráf és $1 < k$, akkor G kétszeresen összefüggő!

Teams-en beadható: 6, 14