Véges matematika II. 6. feladatsor, megoldásvázlatok

1. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 2k\}$. A v csúcsból pontosan akkor vezessen irányított él a w csúcsba, ha $v < w$. A (v, w) él kapacitása legyen 1, ha v páratlan, és 2, ha v páros. Mennyi az 1-ből a $2k$ csúcsba vezető maximális folyam értéke?

Megoldás: Bocsássunk $1-1$ értékű folyamot az $1 \to i \to 2k$ útvonalon minden i-re. Ekkor a folyam értéke $2k-1$, és ugyanekkora az $\{1\}$ $\{2 \ldots 2k\}$ halmazpár által meghatározott vágás értéke.

2. Tegyük fel, hogy a G gráfban a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?

Megoldás: 5-nél kisebb nyilván nem lehet: Menger-tétel szerint 5 a minimális *csúcsszám*, amivel lefoghatóak mind az utak, ennél kevesebb él biztosan kevés. Olyan gráfot viszont könnyű rajzolni, ahol éppen 5 v. 6 v. 7 a lefogó élek min. száma.

3. Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. Ezt úgy szeretné megoldani, hogy a hét minden napján különböző utcákon menjen át, azaz munkába menet egy hét alatt minden utcán legfeljebb egyszer menjen végig. Adjunk olyan algoritmust, amely a város térképe alapján eldönti, hogy ez megtehető-e!

Megoldás: Folyamalgoritmus: forrás az otthona, nyelő a városháza, minden utcaszakasz irányított él 1-es kapacitással. Ekkor egész folyam lemmáját is használva: találunk egy maximális folyamot, ha az legalább 5, megtehető, különben nem.

4. A $2k+1$ pontú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k+1$. Mennyi $\nu(G)$ értéke?

Megoldás 1.: A gráfban Dirac-tétel miatt van Hamilton kör, ebből k független élet kiválaszthatunk. $k \leq \nu \leq \frac{2k+1}{2}$ tehát kész vagyunk.

Megoldásvázlat 2.: Tutte tételt is alkalmazhatjuk a következőképp: hagyjunk el egy random csúcsot, és igazoljuk hogy a Tutte-feltétel teljesül a megmaradt $2k$ csúcsú gráfra. Ez egyszerű, mivel azt látjuk hogy a nagy fokszámok miatt egy X halmaz kivétele után csak kevés (páratlan) komponens keletkezhet, ha $|X| < k$, hiszen minden csúcs legalább $k - |X|$-szel van egy kupacban. Ha meg $|X| \geq k$ akkor még ha minden komponens izolált pont lenne $G \setminus X$-ben, akkor is legfeljebb k izolált pontot kapunk.

5. Egy szigeten n törzs él, akik földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon belőle. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Így minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Bizonyítsuk be, a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része!

Megoldás: Gráfos megfeleltetés: $G(A, B, E)$ páros gráfot definiálunk. Minden földműves-parcelának egy A-beli csúcs felel meg, minden vadász-paarcellának egy B-beli, és él kössön össze olyan csúcspárokat, ahol a megfelelő parcelláknak van metszete. Nekünk egy teljes párosítás kell $G(A, B, E)$-ben, ehhez Kőnig-Hall-Frobeniust használunk, a szokott módon, igazoljuk tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén hogy nincs k olyan vadászparcella, aminek kevesebb mint k földműves-parcellával van metszete.

6.* Legyenek egy gráf pontjai a 3 hosszúságú 0-1 sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Határozzuk meg a maximális folyam értékét $s = (0, 0, 0)$ és $t = (1, 1, 1)$ között!

7.* Egy teljes gráf éleit tetszőlegesen megirányítottuk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráfban biztosan található olyan csúcs, ahonnan bármelyik másik csúcs elérhető legfeljebb 2 hosszú irányított úton!

8. Tegyük fel, hogy G egy k-szorosan összefüggő gráf. Adjunk G-hez egy új v pontot, majd kössük össze v-t a G gráf k különböző pontjával. Igazoljuk, hogy a kapott G' gráf is k-szorosan összefüggő!

Megoldás: (Megbeszéltük: definíciót használva bizonyítunk, két esetre bontva: ha $k-1$ olyan csúcsot hagyunk el az új gráfból, amiben benne van ill. amiben nincs benne v. Kiderül hogy G k-szoros (csúcs)-összefüggősége miatt mindenképp összefüggő a kapott gráf.)

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan összefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is! Mit mondhatunk egy k-szorosan élösszefüggő gráf (pont)összefüggőségéről?

Megoldás: $k-1$ él elhagyásával biztos nem eshet szét, mivel akkor az élek egy-egy végpontját elhagyva is szétesne; ez utóbbi viszont ellentmond a k-csúcsösszefüggőséggel. Ha G k-élösszefüggő, akkor G csúcsösszefüggőségi száma k-t nem haladhatja meg, de k-ig tetszőleges poz. egész értéket felvehet. (Könnyű konstruálni, tedd meg).

10. Adjunk példát olyan gráfra, amely egyszerre teljesíti a következő tulajdonságokat: összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő; 2-szeresen élösszefüggő, de nem 3-szorosan élösszefüggő; továbbá a minimális fokszáma pontosan 4.

Megoldás: Tekintsünk két K_5 teljes gráfot 5 csúcson. Mindkettőnek egy-egy élén jelöljünk ki egy pontot, és azonososítsuk ezt a pontpárt. Ezután a feltételek mindegyike könnyen ellenőrízhető: van elvágó csúcs, létezik két él, aminek elhagyásával szétesik a gráf, de egyetlen él elhagyásával nem esik szét. a minimális fokszám nyilvánvaló.

11. Hányszorosan pont-, illetve élösszefüggő a kocka élei által alkotott gráf? (A gráf csúcsai a kocka csúcsai, élei pedig a kocka élei.) Hányszorosan pont-, illetve élösszefüggő a Petersen-gráf?

Megoldás: Min. fokszám 3 $\rightarrow$ maximum 3 élösszefüggő a gráf, vagyis max. 3-pontösszefüggő. Tetszőleges 2 csúcsot kihajítva a maradék még összefüggő $\rightarrow$ legalább 3-szorosan csúcs-összefüggő. Tehát mindkét összefüggőségi szám 3 mindkét gráf esetén.

12. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pont-, illetve élösszefüggő!

Megoldás: $k = n$ egyszerű ellenőrzés a definícióból, pontosabban itt is legfeljebb n a minimális fokszám miatt, és $n-1$ csúcs eldobása után a gráf még összefüggő. Így a $n \leq$ csúcsösszefüggőségi szám $\leq$ élösszefüggőségi szám $\leq n$.

13. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő 2-reguláris gráf összefüggőségi és élösszefüggőségi száma megegyezik! Igaz-e az állítás 3-, illetve 4-reguláris gráfokra?

Megoldás: 2-reguláris gráfok: a körök diszjunkt uniói. Itt az állítás triviális: ha nem egy komponens van, nincs összefüggőség, különben az összefüggőségi szám 2. 3-reguláris esetén azt kell belátni, hogy nem tudja meghaladni az élösszefüggőség a csúcsösszefüggőséget. Tehát ha 1 elvágó csúcs van a gráfban (aminek kidobásával szétesik a gráf), akkor van elvágó él is. Ez világos, mert az elvágó csúcsból a keletkező komponensek valamelyikébe pontosan 1 él kell hogy menjen a 3 közül. Végül ha 2 méretűaz elvágó csúcshalmaz, akkor pici esetvizsgálatból látszik, hogy megint van a rájuk illeszkedő 5 vagy 6 él közül 2, amiknek az elhagyása után szétesik a gráf.

Végül: 4-reguláris esetben példát tudunk adni arra, hogy 1 csúcs eldobása után szétesik a gráf vagyis nem 2-csúcsösszefüggő, de nincs olyan él, amit elhagyva szétesne a gráf. Például: vegyünk két K_5 teljes gráfot, rakjunk $1-1$ csúcsot mindegyik gráfnak pontosan egy élére, és ezt a két új csúcsot ragasszuk össze.

14. Egy legalább három pontot és legalább egy élt tartalmazó egyszerű gráf bármely e éléhez és v pontjához található olyan kör a gráfban, amely tartalmazza őket. Mutassuk meg, hogy a gráf kétszeresen összefüggő!

15.* Legfeljebb hány élét lehet elhagyni a K_{10} gráfnak úgy, hogy a megmaradt gráf még négyszeresen élösszefüggő legyen?

16. Legyen $1 < k < n$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű összefüggő gráfban minden pont foka legalább $(n+k-2)/2$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő!

17.* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy k-reguláris, egyszerű, összefüggő páros gráf és $1 < k$, akkor G kétszeresen összefüggő!