Véges matematika II. haladó gyakorlat

7. feladatsor

1. Határozzuk meg az $a_n = 2^n$ sorozat generátorfüggvényét, illetve exponenciális generátorfüggvényét!

2. Adjuk meg azokat a sorozatokat, amelyek generátorfüggvényei a következők:
a) $g_1(x) = \frac{1}{1-3x}$
b) $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$
c) $g_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3. Oldjuk meg a következő rekurziókat:
a) $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, továbbá $3 \leq n$ esetén $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$
b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, továbbá $3 \leq n$ esetén $b_n = 10 \cdot b_{n-1} - 25 \cdot b_{n-2}$

4.* Egy turista Bergengóciában minden nap egyet vásárol a következő áruk közül: fagylalt (1 Ft), gyümölcslé (2 Ft), illetve képeslap (2 Ft). Hányféleképpen költhet el így 150 forintot?

5. Hány n betűs szó készíthető az a, b és c betűkből, ha
a) nem állhat egymás mellett két b betű?
b) b betű után közvetlenül nem jöhet c betű?

6. Adjunk meg olyan rekurziót, amelynek megoldása $a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^n$!

7. Hányféleképpen juthatunk el az origóból a (18,6) pontba, ha minden lépésben egyet jobbra vagy egyet felfelé léphetünk? Hányféle út vezet a (18,9), illetve a (6,8) pontba?

8. Jancsi el akar menni Juliskához, akivel a Nyílegyenes-folyónak ugyanazon oldalán laknak, de közben meg akarja itatni a lovát a folyónál. Merre menjen, hogy a lehető legrövidebb úton érjen Juliskához?

9. Hányféleképpen juthatunk el az origóból az (n, n) pontba, ha minden lépésben jobbra vagy felfelé léphetünk egyet? Hány lehetőségünk van akkor, ha nem léphetünk olyan pontra, amelynek y koordinátája 1-gyel kisebb az x koordinátájánál?

10. Hány olyan $2n + 1$ hosszúságú, ± 1 értékekből álló sorozat van, amelyben az elemek összege 1, továbbá bármely kezdőszelet összege (a_1 , $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$) pozitív?

11. Hányféleképpen bonthatunk háromszögekre egy rögzített konvex n-szöget egymást nem metsző átlóival?

12. Bizonyítsuk be a Fibonacci-sorozat következő tulajdonságait:
a) bármilyen $0 < m$ egész esetén a sorozat elemeinek mod m maradékai periodikusak
b) a sorozat szomszédos tagjai relatív prímek
c) van a sorozatban olyan tag, amely 9999-re végződik

13. Egy mozi pénztáránál $2n$ gyerek áll sorba 1000 Ft-os jegyekért. Közülük n-nek ezrese, a másik n-nek pedig kétezrese van. A kasszában nincs váltópénz. Hányféleképp tudnak úgy sorban állni a gyerekek, hogy a sor ne akadjon el (azaz a pénztáros szükség esetén mindig tudjon visszaadni)? Ha az egyforma címlettel rendelkező gyerekek egymás közötti sorrendje nem számít, akkor jelölje ezt a számot C_n, keressünk rá rekurzív, illetve explicit képletet!

14. Oldjuk meg a következő rekurziókat:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, továbbá $3 \le n$ esetén $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2}$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, továbbá $3 \le n$ esetén $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$

15. Egy kerek asztal körül $2n$ ember ül. Párokat szeretnének alkotni úgy, hogy az egy párban lévők kezet foghassanak egymással. (Másik kézfogó pár keze alatt vagy felett nem szabad átnyúlni.) Hányféleképpen alkothatnak ilyen módon n párt?

16.* Bizonyítsuk be a Fibonacci-sorozat $(F_1, F_2, \ldots)$ következő tulajdonságait:
a) ha $k|n$, akkor $F_k|F_n$
b) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
c) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

17. Lehet-e egy homogén lineáris másodrendű rekurzió megoldása az $a_n = 5 - 2n$ explicit alak? Indokold!

18. Szabályos 4-oldalú dobókockával dobunk 10-szer egymás után. A négy oldalon a számok: $1, 2, 3, 4$. Mi annak a valószínűsége, hogy nem lesz a dobás-sorozatban közvetlenül egymást követően páros szám? Írd fel a kapcsolódó rekurzió implicit (képzési) képletét és add meg az implicit képletből eredő karakterisztikus egyenletet.

19. Bizonyítsuk be a Fibonacci-sorozat következő tulajdonságait:
a) bármilyen $0 < m$ egész esetén a sorozat elemeinek mod m maradékai periodikusak
b) a sorozat szomszédos tagjai relatív prímek
c) van a sorozatban olyan tag, amely 9999-re végződik.

20. Hányféle sorrendben mehet be 14 fiú és 23 lány a táncterembe, ha minden pillanatban legalább annyi lánynak kell bent lennie, mint fiúnak, ha a fiúk, illetve lányok egymás közti sorrendje nem számít? És ha igen?

21. (a) Hány részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható 30-cal?
(b) Hány részhalmaza van H-nak, amelyre igaz: ha $x \in H$, akkor van olyan $y \in H$, amelyre $|x - y| = 1$?
Megjegyzés: A feladat (a) részénél az elemek szorzatát az üres halmaz esetén tekintsük 0-nak, az egy elemű $\{x\}$ részhalmaz esetén pedig x-nek. A feladat (b) részénél a megfelelő részhalmazok között meg kell számolnunk az üres halmazt is. (OKTV 18/19, 2. kat. 2. forduló)