

Véges matematika II. gyakorlat

9. feladatsor

- Hány éle lehet egy egyszerű gráfnak, melyben nincs
 - kör;
 - páratlan kör?
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k és l pozitív egészekhez van olyan $M(k, l)$ küszöb, hogy egy legalább $M(k, l)$ hosszú a_1, a_2, \dots számsorozat mindig tartalmaz k hosszú monoton növő vagy l hosszú monoton csökkenő részsorozatot!
- Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú gráf csúcsai színezhetőek 5 színnel (azaz a kromatikus szám legfeljebb 5), akkor legfeljebb $2n^2/5$ éle lehet a gráfnak!
- Adott n origó kezdőpontú félegyenes. Mutassuk meg, hogy legfeljebb $n^2/4$ olyan pár lehet köztük, melyek szöge nagyobb mint 120 fok! Van-e olyan példa, amikor $n^2/4$ van?
- A sík pontjait kiszíneztük pirossal, kézzel és sárgával. Igazoljuk, hogy van egységtávolságra lévő, azonos színű pontpár!
Segítség: Indirekten bizonyítsuk, tegyük fel hogy nincs. Ekkor:
 - Mutassunk három pontot, melyek színe biztosan különböző!
 - Az előző pontban talált három különböző színű pont segítségével mutassunk olyan pontokat, melynek színe garantáltan piros!
 - Bizonyítsuk be, hogy ha két pont távolsága $\sqrt{3}$, akkor színük megegyezik!
 - Mutassuk meg, hogy mégis van két olyan pont, melyek távolsága 1 és színük megegyezik! (Vagyis hogy ellentmondásra jutottunk).
- Színezzük ki a síkot 9 színnel úgy, hogy az egységnyi távolságra lévő pontpárok színe különböző legyen! Megoldható-e ugyanez 7 színnel?
- Adott 60 kör a síkon. Tudjuk, hogy nincs köztük 4 olyan, melyek páronként nem metszik egymást. Mutassuk meg, hogy található a körök között 6 páronként metsző!
- Kunigunda Activityzni hívja 19 legjobb barátjának, de kissé csalódottan látja be, hogy egyetlen négyfős csapatot sem tudnak alakítani, hogy a kvartettben mindenki mindenkit ismerjen.
 - Van-e négy lány a társaságban, akik egyáltalán nem ismerték eddig egymást?
 - legalább hány új ismeretség köttetik Kunigunda játékdélutánján?
- Az alábbi állítások közül melyik igaz?
 - Ha egy n csúcsú teljes gráfot ki lehet úgy színezni 5 színnel, hogy ne legyen benne egyszínű háromszög, akkor ki lehet színezni 4 színnel (piros, kék, zöld, sárga) úgy, hogy ne legyen benne piros teljes 6-os vagy kék háromszög vagy zöld háromszög vagy sárga háromszög.
 - ha egy n csúcsú teljes gráfot ki lehet úgy színezni 5 színnel, hogy ne legyen benne egyszínű teljes négyes, akkor ki lehet színezni 4 színnel (piros, kék, zöld, sárga) úgy, hogy ne legyen benne piros teljes 18-as vagy egyszínű teljes négyes a maradék három szín valamelyikéből;
 - $R(5, 5, 5, 6) \leq R(R(5, 5), 5, 6)$;
 - $R(5, 5, 5, 6) < R(R(5, 5), 5, 6)$;
 - $R(5, 5, 5, 6) \geq R(R(5, 5), 5, 6)$;
 - $R(6, 7, 8, 9) \leq R(R(6, 7), R(8, 9))$;
 - $R(6, 7, 8, 9) \leq \binom{\binom{11}{5} + \binom{15}{7}}{\binom{11}{5} - 1}$