Véges matematika II. gyakorlat

9. alkalom - megoldások

1. Hány éle lehet egy egyszerű n-csúcsú gráfnak, melyben nincs
a) kör;
b) páratlan kör?

Megoldás: a) Ha egy gráf körmentes, akkor fák diszjunkt uniója (erdő). n-csúcsú fának $n-1$ éle van, a több komponensű erdőknek kevesebb: $n-$komponenszám mennyiségű. (Emlék első félévből: kell lennie elsőfokú csúcsnak, azt hagyjuk el, és indukciózzunk). b) páratlan körmentes gráfok pontosan a páros gráfok. (V.ö. első félév, és idei félévünk első gyakorlata). Élszám akkor lesz maximális egy $n = |A| + |B|$ csúcsszámú páros gráf esetén, ha

- a páros gráf teljes, vagyis nem vehetünk hozzá újabb éleket az osztályok közt
- az $|A| \cdot (n - |A|)$ szorzat maximális, vagyis $|A| = \lceil n/2 \rceil$.

Tehát az élszám maximuma $\frac{n^2}{4}$ ha n páros és $\frac{n^2-1}{4}$ ha páratlan.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k és l pozitív egészekhez van olyan $M(k,l)$ küszöb, hogy egy legalább $M(k,l)$ hosszú $a_1, a_2, \ldots$ számsorozat mindig tartalmaz k hosszú monoton növő vagy l hosszú monoton csökkenő részsorozatot!

Megoldás: Alkalmazzuk a Ramsey-elméletet.

- Rendeljünk egy teljes gráfot a sorozathoz: a_i-khez csúcsokat rendelünk, (a_i, a_j) él pedig legyen kék ha $i < j$ és $a_i \leq a_j$, piros ha $i < j$ és $a_i > a_j$.
- Ha elegendőesn sok csúcsunk van, akkor lesz az így kapott kettőszínezett teljes gráfban k-as egyszínű kék klikk vagy l-es egyszínű piros; egész pontosan ha $M(k,l) \geq R(k,l)$, akkor ez teljesül.
- Ha a klikk kék, az mon. növő, ha piros, mon csökkenő részsorozatot találtunk.

Megj: az így kapott becslés nem lesz éles; ennek az az oka, hogy a hozzárendelt kettőszínezések nagyon speciális tulajdonságúak. Míg $R(k,k)$ exponenciális ütemben növekszik k függvényében, a feladatbeli legkisebb küszöb így fest: $M(k,l) = (k-1) \cdot (l-1) + 1$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú gráf csúcsai színezhetőek 5 színnel (azaz a kromatikus szám legfeljebb 5), akkor legfeljebb $2n^2/5$ éle lehet a gráfnak!

Megoldás: A gráfban nem lehet 6-os klikk, mert az nem színezhető 5 színnel. Ekkor a Turán-tétel szerint az élszám legfeljebb annyi, mint az 5-kupacos $T_{n,5}$ gráf élszáma, és $|E(T_{n,5})| \leq \frac{5-1}{2 \cdot 5} n^2$. Ez éles is ha n osztható 5-tel.

4. Adott n origó kezdőpontú félegyenes. Mutassuk meg, hogy legfeljebb $n^2/4$ olyan pár lehet köztük, melyek szöge nagyobb mint 120 fok! Van-e olyan példa, amikor $n^2/4$ van?

Megoldásvázlat: Félegyenesekhez rendeljünk csúcsokat, és éleket olyan csúcspár közöt vegyünk fel, ahol a nekik megfelelő félegyenesek szöge $> 120°$. Eszerint az így kapható gráfokban szeretnénk az élszámot maximalizálni. Nos, az ilyen gráfok K_3-mentesek, mert három félegyenes közrezárt szögei között kell lennie $\leq 120°$-nak is. Eszerint a Mantel tétel alapján legfeljebb $\lfloor n^2/4 \rfloor$ az élszám. Ez ráadásul éles becslés, ugyanis ennyi elérhető. Vegyünk fel $\lfloor n/2 \rfloor$ félegyenest, amelynek a bezárt szöge az x tengely pozitív féltengelyével $\leq 30°$ és vegyünk fel $\lceil n/2 \rceil$ félegyenest, amelynek a bezárt szöge az x tengely negatív féltengelyével $\leq 30°$. Az ennek a konstrukciónak megfelelő gráf éppen a $T(n,2)$ (teljes páros) Turán gráf lesz.

5. A sík pontjait kiszíneztük pirossal, kékkel és sárgával. Igazoljuk, hogy van egységtávolságra lévő, azonos színű pontpár!
Segítség: Indirekten bizonyítsuk, tegyük fel hogy nincs. Ekkor:

a) Mutassunk három pontot, melyek színe biztosan különböző!

b) Az előző pontban talált három különböző színű pont segítségével mutassunk olyan pontokat, melynek színe garantáltan piros!

c) Bizonyítsuk be, hogy ha két pont távolsága $\sqrt{3}$, akkor színük megegyezik!

d) Mutassuk meg, hogy mégis van két olyan pont, melyek távolsága 1 és színük megegyezik! (Vagyis hogy ellentmondásra jutottunk).

Megoldás:

a) vegyünk 3 pontot egységnyi távolságra egymástól.

b) ha veszünk két egységoldalú háromszöget, amelyeknek közös az alapja, akkor az átellenes csúcsok azonos színűek kell legyenek a) szerint.

c) $\sqrt{3}$ távolságú pontok felezőmerőlegesén a pontoktól egységtávolságra előáll a b)-beli konfiguráció, tehát ők azonos színűek ha összesen 3 színünk van.

d) Vegyünk egy pont körüli $\sqrt{3}$ sugarú kört. Ezek a pontok a körön mind azonos színű pontok lennének c) miatt, de van köztük egységtávolságú.

6. Színezzük ki a síkot 9 színnel úgy, hogy az egységnyi távolságra lévő pontpárok színe különböző legyen! Megoldható-e ugyanez 7 színnel?

Megoldásvázlat: Vegyük először a kockás füzetünket, színezzünk ki 9 színnel egy 3×3-as részt, majd ezzel a négyzettel "parkettázzuk ki" az egész füzetet. (Ha tetszik, az a kisnégyzet,aminek a bal alsó sarkának koordinátája $(a;b)$, legyen ugyanolyanra színezve mint az, amelyiknek bal alsó sarka koordinátája $(k;l)$ pontosan akkor ha $3|(a-k)$ és $3|(b-l)$.)

Ez így még pont nem jó, mert lesznek pontok $d \in (0, \sqrt{2})$ távolságra, de $(\sqrt{2}, 2)$ távolságra meg nem. Így egy $\lambda \in (1/2, 1/\sqrt{2})$ arányú kicsinyítéssel célba érünk.

7 színnel is megoldható a dolog, picit több vizsgálatot igényel, és a hatszögrács hatszögeit (a Siedler von Catan játék lapkáit) kell 7 színnel színezni hozzá szintén periodikusan.

7. Adott 60 kör a síkon. Tudjuk, hogy nincs köztük 4 olyan, melyek páronként nem metszik egymást. Mutassuk meg, hogy található a körök között 6 páronként metsző!

Megoldásvázlat: Modell: Körökhöz csúcsokat rendelünk, és egy csúcspárt összekötünk éllel ha a megfelelő körök metszőek.

Ha a csúcsszám, vagyis $n = 60$ legalább annyi mint $R(4,6)$, akkor a Ramsey-szám definíciója szerint lesz üres K_4 vagy teljes K_6 részgráf. Innen kész is vagyunk, mert az Erdős-Szekeres féle binomiális felső becslés szerint $R(4,6) \leq \binom{6+4-2}{4-1} = 56 \leq 60$.

8. Kunigunda Activityzni hívja 19 legjobb barátnőjét, de kissé csalódottan látja be, hogy egyetlen négyfős csapatot sem tudnak alakítani, hogy a kvartettben mindenki mindenkit ismerjen.

a) Van-e négy lány a társaságban, akik egyáltalán nem ismerték eddig egymást?

b) legalább hány új ismeretség köttetik Kunigunda játékdélutánján?

Megoldás: HF volt

9. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Ha egy n csúcsú teljes gráfot ki lehet úgy színezni 5 színnel, hogy ne legyen benne egyszínű háromszög, akkor ki lehet színezni 4 színnel (piros, kék, zöld, sárga) úgy, hogy ne legyen benne piros teljes 6-os vagy kék háromszög vagy zöld háromszög vagy sárga háromszög.

b) ha egy n csúcsú teljes gráfot ki lehet úgy színezni 5 színnel, hogy ne legyen benne egyszínű teljes négyes, akkor ki lehet színezni 4 színnel (piros, kék, zöld, sárga) úgy, hogy ne legyen benne piros teljes 18-as vagy egyszínű teljes négyes a maradék három szín valamelyikéből;

c) $R(5,5,5,6) \leq R(R(5,5),5,6)$;

d) $R(5,5,5,6) < R(R(5,5),5,6)$;

e) $R(5,5,5,6) \geq R(R(5,5),5,6)$;

f) $R(6,7,8,9) \leq R(R(6,7),R(8,9))$;

g) $R(6,7,8,9) \leq \binom{\binom{11}{5}+\binom{15}{7}}{\binom{11}{5}-1}$

Megoldás: a) így fogalmazható át: ha $n < R(3,3,3,3,3)$ akkor $n < R(3,3,3,6)$ biztosan igaz, vagyis n-et kiküszöbölve $R(3,3,3,3,3) \leq R(3,3,3,6)$. Ez így van, mert egy háromszögmentes jó színezésből két szín összevonása (azonosnak tekintése) után nem fogunk egyszínű teljes hatszöget találni, hiszen $R(3,3) = 6$,

vagyis a teljes hatszög léte az egyik színben egy teljes háromszög létét követeli meg.
b) ugyanígy: $R(4,4,4,4,4) \leq R(4,4,4,18)$ mert $R(4,4) \leq 2R(3,4) = 18$.
c) ugyanígy
d) igaz, de az előzőekből a szigorú egyenlőtlenség nem következik.
e) hamis
f) lényegében a)-t alkalmazzuk úgy, hogy két különböző színpárt is összevonunk.
g) az f)-beli egyenlőtlenséget folytatjuk, és az Erdős-Szekeres binomiális felső becslést alkalmazzuk.