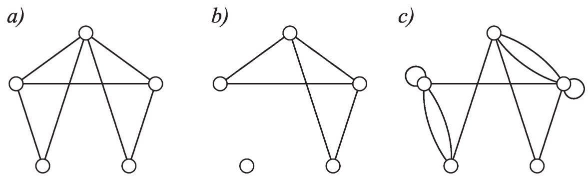
II. Gráfok

Alapfogalmak

346. *a)* A gráf egyszerű. 3 komponensből áll, 7 pontja (ezek közül kettő izolált), 5 éle van. Az egyes csúcsok fokszámai rendre 3, 3, 2, 1, 1, 0, 0.
b) A gráf 2 komponensből áll. 8 pontja (egy izolált), 16 éle van. A többszörös élek közül kettő kétszeres, egy háromszoros. Az egyes csúcsok fokszámai rendre 5, 5, 5, 5, 5, 4, 3, 0.
c) A gráf egy komponensből áll, 5 pontja, 7 éle (ebből egy hurokél és egy háromszoros él) van. Az egyes csúcsok fokszámai rendre 4, 2, 4, 3, 1.
d) Az irányított gráf 3 komponensből áll, 7 pontja (egy izolált), 7 éle van. Az irányított élek közül egy kétszeres.

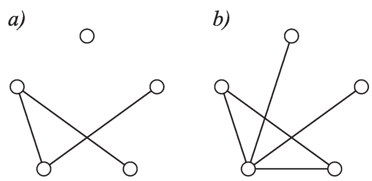
347.

347/I.



a) és *b)* egyszerű gráfok, *a)* 1, *b)* pedig 2 komponensből áll (347/I. ábra). A komplementer gráfjaik a 347/II. ábrán láthatók:

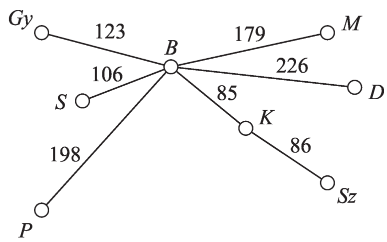
347/II.



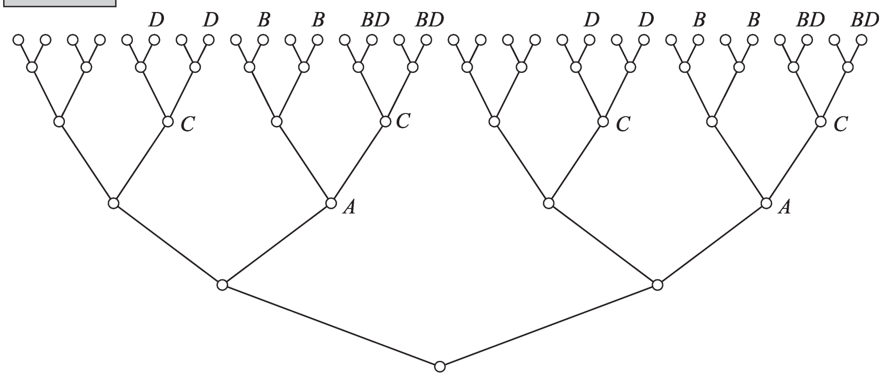
348. *a)* Az egyik pontból 5 él indul ki, a neki megfelelő személynek van a legtöbb ismerőse, 5.
b) A pontnak megfelelő személynek nincs ismerőse a társaságban.

349. *a)* Ilyen városok pl. Debrecen és Siófok, vagy Szeged és Győr, amelyek közti útvonal Budapesten halad át. A Debrecen–Siófok távolság 332 km, ez megegyezik a Debrecen–Budapest és Budapest–Siófok távolságok összegével; a Szeged–Győr távolság 294 km, ez megegyezik a Szeged–Budapest és Budapest–Győr távolságok összegével.

349.



350.



350. Az ábrán az apai ágat mindig jobbra, az anyai ágat mindig balra tüntettük fel. Nagyapáinkat *A*, az ő dédapáikat *B* betűvel jelöltük; hasonlóan dédapáinkat *C*, az ő nagyapjaikat *D* betűvel.
Látható, hogy nagyapáink dédapjai és dédapáink nagyapjai általában különböző személyek. (A „nagymamai” ágú dédapáink nyilván nem rokonai a nagyapai ág leszármazottainak.)

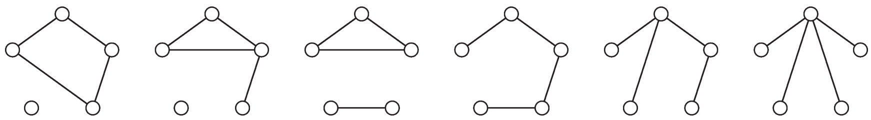
Megjegyzés:
A szemléletesség kedvéért alkalmazott gráfok csak formálisak, hiszen nem fogalmaztuk meg pontosan, hogy mik is a gráf csúcsai és élei. Hasonló típusú feladatok esetében alkalmazhatunk irányított gráfokat is, ha nem egyértelmű a folyamat iránya, vagy ha az irányt hangsúlyozni szeretnénk.

351. *a)* A gráfok izomorfak egymással.
b) Számozott csúcsok esetén a 2., 3., 4. gráfok izomorfak egymással, hiszen ugyanazon pontjaik között van él.

352.

csúcsok száma	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	*n*	*n*
élek száma	0	1	2	3	4	2	3	4	3	4	3	4
gráfok száma	1	1	2	3	2	2	3	6	3	8	3	9

352.

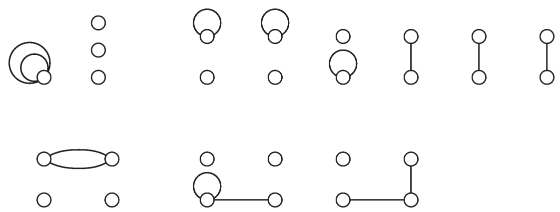


353.

csúcsok száma	1	1	2	2	2	3	3	4	4	*n*	*n*
élek száma	1	2	1	2	3	1	2	1	2	1	2
gráfok száma	1	1	2	4	6	2	6	2	7	2	6

A 4 csúcsú, 2 élű gráfok:

353.



354.

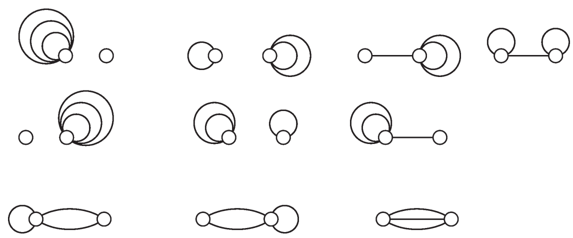
csúcsok száma	2	2	2	3	3	3	4	4	4
élek száma	0	1	2	1	2	3	1	2	3
számozott csúcsú gráfok száma	1	1	0	3	3	1	6	15	20

355.

csúcsok száma	1	1	2	2	2	3	3	4	4
élek száma	1	2	1	2	3	1	2	1	2
számozott csúcsú gráfok száma	1	1	3	6	10	3	10	10	49

A 2 csúcs, 3 él lehetséges esetei:

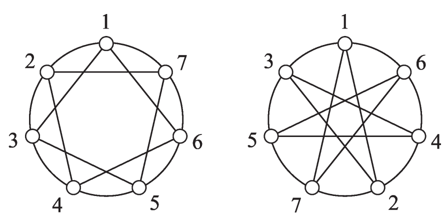
355.



356. *a)* Izomorfak.
b) Semelyik kettő nem izomorf.
c) Izomorfak.

357. Az első gráfban hurokélek vannak, a másik kettőben nem, tehát az első nem lehet izomorf sem a 2., sem a 3. gráffal. A 2. és 3. gráfok izomorfak, egy lehetséges számozás látható az ábrán.
Mindkét gráfban pontosan ugyanazokat a csúcsokat kötöttük össze éllel.

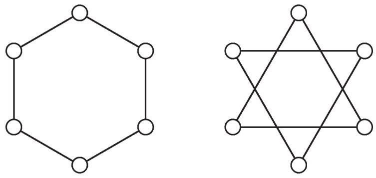
357.



358. Nem izomorfak. (Pl. a második ábrán bármely pontból bármely pontba el lehet jutni két élen keresztül.)

359. *a)* Igen. *b)* Nem, egy ellenpélda:

359.



360. *a)* Ha egy 6 pontú egyszerű gráfban minden pont foka 3, akkor a komplementerében minden pont foka 2. Minden gráfot a komplementerével párosíthatunk, ugyanannyi van a kétfajta gráfból.

b) A 6 pontú teljes gráf éleinek száma 15. A 7 élű gráfokat párosíthatjuk a 8 élű komplementer gráfjaikkal, a kétfajta gráfból ugyanannyi van.

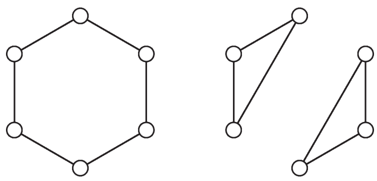
361. 1. Igaz; 2. igaz; 3. igaz; 4. hamis.

Ellenpélda:

361/I.

vagy egyszerű gráfokra:

361/II.



362.

csúcsok száma	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
élek száma	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	7	8	9	10
egyszerű gráfok száma	1	1	2	3	2	1	1	1	1	2	4	4	2	1	1

Észrevehetjük, hogy 4 pontú, k élű egyszerű gráf ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) ugyanannyi van, mint 4 pontú, $6 - k$ élű egyszerű gráf; vagy 5 pontú, m élű ($m = 0, 1, 2, 3$) ugyanannyi, mint 5 pontú, $10 - m$ élű.

363.

csúcsok száma	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
élek száma	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6
számozott egyszerű gráfok száma	1	3	3	1	1	6	15	20	15	6	1

A táblázat szimmetriáját vehetjük észre.

Egy 3 csúcsú egyszerű gráfnak legfeljebb 3 éle lehet. Ezekből kell kiválasztani rendre 0, 1, 2, 3-at. Minden olyan gráfhoz, aminek k éle van ($k = 0, 1, 2, 3$), párosíthatunk egy olyat, amelyik $3 - k$ élű, így a két típus száma megegyezik. Hasonló a helyzet a 4 pontú egyszerű gráfokkal, melyeknek legfeljebb 6 élük lehet.

364. *a)* Minden pontra teljesül, hogy az oda befutó és onnan kiinduló nyilak száma összesen 3.

b) *F*.

c) Veretlen csapat nincs, hiszen minden pontból indul ki nyíl.

d) A pontszámok: *A:* 6, *B:* 6, *C:* 6, *D:* 3, *E:* 6, *F:* 0.

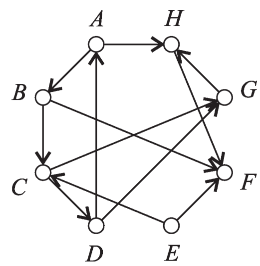
365.

a) *C* 4 mérkőzést játszott, a többi csapat 3-3-at.

b) *F*-nek 3 győzelme van, ez a legtöbb. Nincs győzelme *E*-nek.

c) Nem, pl. *D*, *A*, *B*, *C* között „körbeverés” történt.

365.



366. *a)* A *C* vagy a *D* érme lehet a legnehezebb.

b) Ez a mérési ábra nem jöhet létre. Az *A*, *F*, *C* összehasonlításakor valószínűleg mérési hiba történt.

c) A legnehezebb a *D* érme.

367. *a)* Az *a)* esetben $B \to A \to C \to E \to D \to F$ az erősorrend.

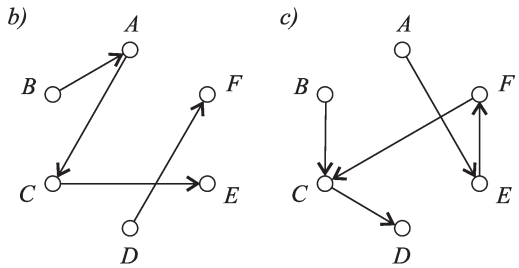
A *b)* esetben $B \to A \to C \to E$, illetve $D \to F$ kapcsolatokat ismerjük.

A *c)* esetben $A \to E \to F \to C \to D$ és $B \to C \to D$ sorrendek állapíthatók meg.

b) Ugyanezeket az információkat nyerjük a mellékelt ábrákról is.

c) 5 mérkőzésre mindenképpen szükség van. Minden mérkőzés után legfeljebb egy játékosról – a vesztesről – állíthatjuk, hogy nem lehet ő a legjobb.

367.



d) 14. Ez a helyzet áll elő, ha pl. a két leggyengébb játékos kivételével mindenki játszott mindenkivel. (Összesen 15 mérkőzésre kerülhet sor.)

368. *a)* 7.

b) A verseny alakulása $2^7 = 128$-féleképpen történhet, hiszen mindegyik mérkőzést az alsó, illetve a felső ágról érkező csapat is megnyerheti.

c) Az elődöntőben *B* ellenfele *C* vagy *D* lehet; a másik ágon pedig 4-féle párosítás alakulhat ki.

d) Az *A–B*, *E–F*, illetve a döntőben a *D–G* párosítások eredménye kétféle lehet, ez összesen $2^3 = 8$ lehetőség.

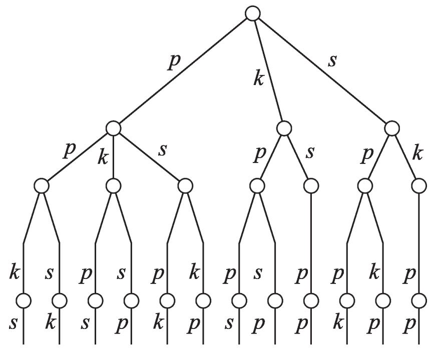
II

Megjegyzés:
Itt és a következő néhány feladatban a gráfok segítségével könnyebben áttekinthetővé tehető a feladat, illetve annak megoldása. Valójában szemléltető jelleggel csupán formális gráfokat alkalmazunk, hiszen pontosan meg kellene határoznunk a gráf pontjait és csúcsait. (Ebben a feladatban a gráf pontjainak egyes játékállapotok, a következő feladatban húzási helyzetek felelnek meg stb.) A formális gráfokat tekinthetjük folyamatábráknak, s alkalmazhatunk irányított éleket is.

369. *a)* 6; *b)* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

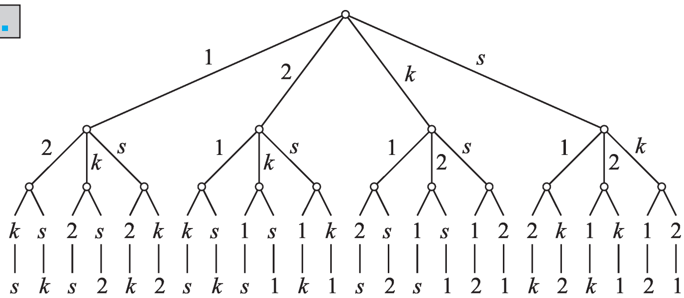
370. *a)*

370/a.



b) Jelöljük a két piros golyót 1-gyel és 2-vel!

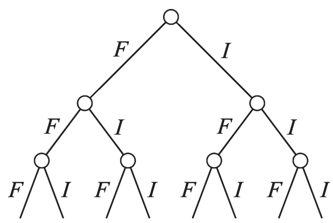
370/b.



c) Mindegyik sorozat létrejöttének azonos a valószínűsége.
A második ábrán látható, hogy a *ppks*, *pkps* stb. sorozatok mindegyike kétféleképpen keletkezhet, pl.: *ppks* ≈ *12ks* és *ppks* ≈ *21ks*.

371. *a)*

371.

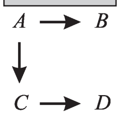


b) A 8 egyformán valószínű sorozatból 3-ban van 2 fej és 1 írás, a valószínűség $\frac{3}{8}$.

372. *a)* Az 5 érmének $5! = 120$ különböző sorrendje lehetséges, s minden mérésnek kétfajta eredménye lehet. Mivel $2^6 = 64 < 120 < 2^7 = 128$, legalább hét mérésre lesz szükség. (A 120 és a 128 igen közeli számok, igyekezni kell minden mérésnél megközelítőleg felezni a lehetőségek számát.)

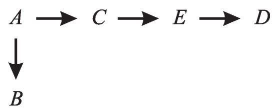
Jelöljük az érméket A, B, C, D, E-vel, s először hasonlítsuk össze pl. A-t a B-vel, majd C-t a D-vel! Feltehetjük, hogy a nehezebb B, illetve D volt, s ezt jelölhetjük $A \to B$, illetve $C \to D$ módon. Harmadik mérésként A és C összehasonlítása következhet. A szimmetrikus helyzet miatt most is feltehetjük, hogy $A \to C$, így a 372/I. gráfot kapjuk.

372/I.



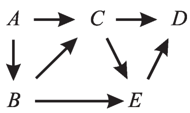
Ezután helyezzük el E-t az $A \to C \to D$ láncban! E négy helyre kerülhet, két méréssel meg tudjuk határozni a helyét. Először C-vel hasonlítjuk össze, s ha pl. nehezebb volt, akkor D-vel. Ha D-nél pl. könnyebbnek bizonyult, akkor a 372/II. gráfot kapjuk.

372/II.



Végül B-t helyezzük el az $A \to C \to E \to D$ láncban. Négy helyre kerülhet, ezért először E-vel hasonlítjuk össze, s ha pl. könnyebb volt, akkor C-vel. Így a 7 mérés valóban elegendő ahhoz, hogy megállapítsuk, milyen növekvő sorrendben következnek egymás után az érmék. Ha az utolsó mérés eredménye pl. $B \to C$, akkor a mérési eredményeket a 372/III. gráffal szemléltethetjük.

372/III.



A mérési eljárás akkor is hasonlóan végezhető el, ha az egyes mérések más eredményt adnak, a kapott irányított gráf viszont más lesz.

Összefüggések a gráf csúcsai és élei között

373. Az ismeretségek számának összege 37. A társaság bármely két A és B tagjára igaz, hogy a közöttük lévő ismeretséget A-nál és B-nél is beszámítottuk az összegbe. Ezért az egyes tagok ismeretségeit összeadva a tagok közötti ismeretségek számának kétszeresét kapjuk. Ez csak páros szám lehet, vagyis a vendégek közül valaki biztosan tévedett.

374. Az előző megoldásnál láttuk, hogy az egyes tagok ismeretségei számának összege csak páros szám lehet. Ha egész számok összege páros, akkor az csak úgy lehetséges, ha páros számú páratlan tag szerepel az összegben.

375. Az előző feladatok megoldásai alapján a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő. Ez az összefüggés akkor is igaz marad, ha a gráfban többszörös élek vagy hurokélek vannak. Így az élek száma:

a) 8; *b)* 6; *c)* 10.

d) Ilyen gráf nincs, a fokszámok összege nem lehet páratlan.

376. Az egyes tagok ismeretségeinek összege páros, ez pedig nem lehetséges, ha mind a 15 szám páratlan. A házigazda biztos lehetett a dolgában.

377. Az ismeretségek kölcsönösek, így a két csapat egy-egy tagja közötti ismeretség egyaránt eggyel növeli mindkét csapat pontszámát. Ez a játék nem izgalmas: ha senki sem tévedett, a két összeg egyenlő.

378. Ha a társaság n tagból áll, bármely személynek 0, 1, 2, … , $n-1$ barátja lehet. Azonban ha van olyan, aki $n-1$ tagnak barátja (vagyis mindenki másnak), akkor nem lehet olyan, akinek 0 barátja van (és fordítva). Tehát $(n-1)$-féle lehetőség adódik az egyes tagok barátainak számára, s mivel n tag van a társaságban, a skatulyaelv miatt lesz közöttük kettő, akinek ugyanannyi barátja van.

379. *a)* Igaz; *b)* igaz; *c)* igaz;

d) igaz. Ha ugyanis n pont esetén minden pont legalább másodfokú, akkor az élek száma legalább $\frac{n\cdot 2}{2}=n$ lenne; márpedig kevesebb él van, mint pont.

380. *a)* A fokszámok összege 13, páratlan, tehát ilyen gráf nincs.

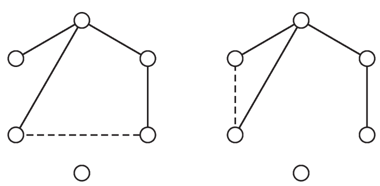
b) A fokszámok összege 14, a gráfnak 7 éle van. A két negyedfokú pont között van él, különben 4 másodfokú pont is lenne. Ha az egyik negyedfokú pontból meghúzzuk a 4 élt, a másikból további 3-nak kell kiindulnia. Ezek egyike az eddig izolált pontba megy, a másik kettő szimmetrikus helyzetű. Egyetlen egyszerű G gráf van.

c) Ilyen egyszerű gráf nincs; ha van két ötödfokú pont, akkor ezek minden más ponttal össze vannak kötve, tehát minden pont legalább másodfokú.

d) A gráfnak 10 éle van. Egyszerűbb a $\overline{G}$ komplementer gráfot vizsgálni. Ennek 5 éle van, fokszámai 0, 0, 2, 2, 3, 3. A két izolált pont miatt könnyen adódik, hogy egyetlen ilyen gráf van.

e) A gráfnak 5 éle van. Ha behúzzuk a harmadfokú pont éleit, majd az egyik izolált pontból egy élt, az utolsó él behúzására két lehetőségünk van (ábra).

380/e.



381. *a)* Nincs megoldás.

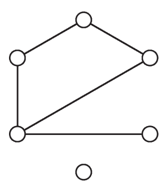
b) A két negyedfokú pontot $\binom{6}{2}$, a maradék 4 csúcsból a két másodfokú pontot $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk. Eredmény: $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}=15\cdot 6=90$.

c) Nincs megoldás.

d) $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}=15\cdot 6=90$.

e) Ha a gráf tartalmaz 4 hosszú kört (381/I. ábra):

381/I.



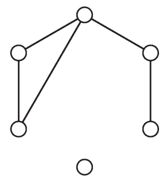
II

A kör pontjait $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választhatjuk ki, s minden kiválasztáshoz három kör tartozik. Ugyanis ha a kör csúcsait 1, 2, 3, 4-gyel jelöljük, a rögzített 1-es után a 2, 3, 4 elemeknek $3! = 6$-féle sorrendben következhetnek, de egy-egy kört két sorrend is meghatároz (pl. az $1-2-3-4$ és $1-4-3-2$ körök megegyeznek). A körön kívüli elsőfokú pontot 2-féleképpen választhatjuk ki és 4 ponttal köthetjük össze. Az I-es típusú gráfok száma tehát $15 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 360$.

Ha a gráf 3-hosszú kört tartalmaz (381/II. ábra):

A kör pontjait $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen választhatjuk ki. Bármelyik izolált pontot a kör bármely pontjával összeköthetjük ($3 \cdot 3 = 9$ eset), s hozzá ki kell még választanunk egy pontot a maradék kettő közül. A II-es típusú gráfok száma $20 \cdot 9 \cdot 2 = 360$.

381/II.



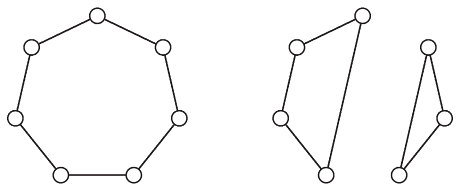
Összesen $360 + 360 = 720$ gráf van.

382. *a)* Bármely pont foka legfeljebb 7 lehet.
b) A fokszámok összege nem lehet páratlan.
c) Ha van hetedfokú pont, akkor nem lehet nulladfokú.
d) Ha két hetedfokú pont van, akkor minden pont foka legalább 2.
e) Ha három hetedfokú pont van, akkor minden pont foka legalább 3.

383. A fokszámok összege legalább $5 \cdot 3 = 15$, a gráfnak legalább 8 éle van. Egyszerűbb a komplementer gráfok leszámolása, ezeknek 0, 1 vagy 2 élük lehet.
a) 5 pontú, egyszerű gráf 0 élű 1 darab, 1 élű 1 darab, 2 élű 2 darab van, összesen 4 darab.
b) Ha a csúcsok számozottak, akkor:
0 élű gráf 1 van;
1 élű gráf 10 darab (a 10 lehetséges él bármelyikét kiválaszthatjuk);
2 élű gráf $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ darab (a 10 lehetséges élből 2-t kell kiválasztanunk).
Összesen 56 darab 5 pontú, egyszerű, számozott gráf van.

384. Az ábrán lévő gráfok megfelelőek.

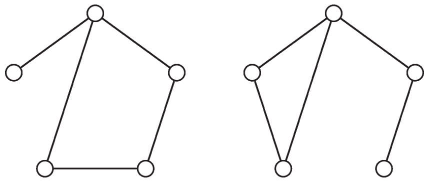
384.



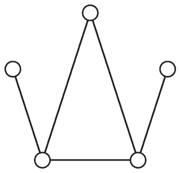
385. Az 5 pontú teljes gráfban 10 él van, tehát csak 5 élű gráf lehet izomorf a komplementerével.
Nem lehet továbbá olyan pont a gráfban, melynek fokszáma 0 vagy 4, tehát a fokszámok 1, 2, 3 értékeket vehetnek fel. Az egyes lehetőségek a fokszámokra a következők:
a) 2, 2, 2, 2, 2. Egyetlen ilyen gráf van, amely izomorf a komplementerével.

II

385/I.



385/II.



b) 1, 2, 2, 2, 3. A 380. *e)* feladat megoldása alapján 2 ilyen gráf van (385/I. ábra).

Ezek nem izomorfak saját komplementer gráfjaikkal. (Az egyik komplementere izomorf a másik gráffal és fordítva.)

c) 1, 1, 2, 3, 3. A két harmadfokú pontot össze kell kötni (egyébként nem lenne elsőfokú pont), és mindkettőhöz csatlakozik két elsőfokú pont. Egyetlen ilyen gráf van (385/II. ábra), s ez komplementerével izomorf. Összesen két 5 pontú egyszerű gráf van, amely izomorf a komplementerével.

386. A társaság tagjait pontokkal, a közöttük lévő ismeretségeket élekkel szemléltethetjük. A feladat az 5, illetve n pontú teljes gráf éleinek számát kérdezi.

a) Néhány lehetséges megoldási gondolatmenet:

Első megoldás: Mindenki 4 másik személyt ismer, ez $5 \cdot 4 = 20$ ismeretség. De mivel minden ismeretséget kétszer számoltunk (a két személynél), az összes ismeretség száma $\frac{20}{2} = 10$.

Második megoldás: Számozzuk be a társaság tagjait 1-től 5-ig! Az első személy 4 másikat ismer, a második már csak 3-at (az első taggal való ismeretséget már számoltuk), a harmadik 2-t, a negyedik 1-et. Az ötödik minden ismeretségét számoltuk már, összesen $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ ismeretség van.

Harmadik megoldás: Az öt személyből bármely kettőt kiválasztva egyértelműen meghatározzuk a hozzájuk tartozó ismeretséget. Öt személyből kettőt úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott személyek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet.

Negyedik megoldás: Jelölje f_n az n tagú társaságban lehetséges maximális ismeretségek számát! ($n \in \mathbf{Z}^+$)
$f_1 = 1$, $f_2 = 1$ stb.; a feladat f_5 meghatározása.
Tegyük fel, hogy k személy esetén a maximális ismeretségek száma f_k! Ekkor egy $(k + 1)$. személy megjelenésekor k új ismeretség keletkezik, ezért $f_{k+1} = f_k + k$. Innen $f_3 = f_2 + 2 = 3$, $f_4 = f_3 + 3 = 6$, $f_5 = f_4 + 4 = 10$.

b) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

387. $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

388. Minden lehetséges élt vagy a gráfban, vagy a komplementerében felveszünk, ezért az élek együttes száma $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

389. Ha n versenyző vesz részt a versenyen, akkor mindenki $n-1$ mérkőzést játszik összesen, eddig tehát mindenki $n-3$ mérkőzést játszott. Innen $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = 65$, $n = 13$ ($n = -10$ hamis gyök).

390. Az 5 pontú teljes gráf éleinek száma 10. A számozott gráfhoz mindegyik él vagy hozzátartozik, vagy nem. A 10 él mindegyikéhez – egymástól függetlenül – kétféle értéket rendelhetünk, így a gráfok száma $2^{10} = 1024$.

391. *a)* 5 pontú teljes gráfot kapunk.

b) Az 5 pontú teljes gráf éleinek száma $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

c) $\dbinom{10}{4} = 210$-féleképpen.

392. *a)* 7 pontú teljes gráfot kapunk, minden csúcsban egyszeres hurokéllel.

b) $\dfrac{7 \cdot 6}{2} + 7 = 28$.

393. *Első megoldás:* Levonjuk az n pontot egymással összekötő összes szakasz számából az n-szög oldalainak számát. Eredmény: $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2} - n$.

Második megoldás: Egy csúcsot $n-3$ másikkal köthetünk össze, n csúcs esetén ez $n(n-3)$ összekötő szakaszt jelent. Mivel mindegyik átlót kétszer számoltuk (a két végén), az átlók száma $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$.

394. $219 - 39 = 180$ belső piros pont van. A piros pontokból kiinduló szakaszok száma $180 \cdot 4 + 39 \cdot 3 = 837$, ezek mind pirosak vagy feketék. A piros szakaszokat a két végpontjuknál kétszer számoltuk, így ha x a piros szakaszok száma, akkor $837 = 2x + 237$. Innen $x = 300$, ennyi piros szakasz van. Az összes szakasz száma $19 \cdot 20 \cdot 2 = 760$, a kék szakaszok száma $760 - 300 - 237 = 223$.

Szabályos testek csúcsai, élei

395. Egy lapon 3 él, a négy lapon $4 \cdot 3 = 12$ él van. De mivel minden élben két lap találkozik, ezért minden élt kétszer számoltunk. Az élek száma tehát $\dfrac{12}{2} = 6$.

396. Egy lapon 3 csúcs, a 8 lapon $8 \cdot 3 = 24$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 4 lap találkozik, ezért minden csúcsot 4-szer számoltunk. A csúcsok száma tehát $\dfrac{24}{4} = 6$.

Egy lapon 3 él, a 8 lapon $8 \cdot 3 = 24$ él van. De mivel minden élben 2 lap találkozik, ezért minden élt 2-szer számoltunk. Az élek száma tehát $\frac{24}{2} = 12$.

397. Egy lapon 3 csúcs, a 20 lapon $20 \cdot 3 = 60$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 5 lap találkozik, ezért minden csúcsot 5-ször számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{60}{5} = 12$.

Egy lapon 3 él, a 20 lapon $20 \cdot 3 = 60$ él van. De mivel minden élben 2 lap találkozik, ezért minden élt 2-szer számoltunk. Az élek száma tehát $\frac{60}{2} = 30$.

398. Nem lehetséges. A hat, egy csúcsban találkozó szabályos háromszög csúcsba befutó szögeinek összege 360°, vagyis kifeszítik a síkot, nem zárnak be véges térrészt. 6-nál több háromszög esetén 360°-nál nagyobb értéket kapunk, ami lehetetlen.

399. Egy lapon 4 csúcs, a 6 lapon $4 \cdot 6 = 24$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 3 lap találkozik, ezért minden csúcsot 3-szor számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{24}{3} = 8$.

Egy lapon 4 él, a 6 lapon $6 \cdot 4 = 24$ él van. De mivel minden élben 2 lap találkozik, ezért minden élt 2-szer számoltunk. Az élek száma tehát $\frac{24}{2} = 12$.

400. Nem lehetséges. Egy csúcsba befutó négyzetek szögeinek összege 360°-nál csak kisebb lehet.

401. Egy lapon 5 csúcs, a 12 lapon $12 \cdot 5 = 60$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 3 lap találkozik, ezért minden csúcsot 3-szor számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{60}{3} = 20$.

Egy lapon 5 él, a 12 lapon $12 \cdot 5 = 60$ él van. De mivel minden élben 2 lap találkozik, ezért minden élt 2-szer számoltunk. Az élek száma tehát $\frac{60}{2} = 30$.

402. Nem lehetséges. A csúcsba befutó ötszögek szögeinek összege 360°-nál csak kisebb lehet.

403.

	tetraéder	kocka	oktaéder	dodekaéder	ikozaéder
lapok száma	4	6	8	12	20
csúcsok száma	4	8	6	20	12
élek száma	6	12	12	30	30

Mindegyik szabályos testre igaz a „csúcsok száma + lapok száma = élek száma + 2” összefüggés.

404. Egy élen 2 csúcs, a 30 élen $30 \cdot 2 = 60$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 5 lap találkozik, ezért minden csúcsot 5-ször számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{60}{5} = 12$.
Egy élhez 2 lap, a 30 élhez $30 \cdot 2 = 60$ lap tartozik. De mivel minden lapot 3 él határol, ezért minden lapot 3-szor számoltunk. A lapok száma tehát $\frac{60}{3} = 20$.

405. Egy élen 2 csúcs, a 12 élen $12 \cdot 2 = 24$ csúcs van. De mivel minden csúcsban 4 lap találkozik, ezért minden csúcsot 4-szer számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{24}{4} = 6$.
Egy élhez 2 lap, a 12 élhez $12 \cdot 2 = 24$ lap tartozik. De mivel minden lapot 3 él határol, ezért minden lapot 3-szor számoltunk. A lapok száma tehát $\frac{24}{3} = 8$.

406. Egy csúcshoz 3 lap, a 20 csúcshoz $20 \cdot 3 = 60$ lap tartozik. De mivel minden laphoz 5 csúcs tartozik, ezért minden lapot 5-ször számoltunk. A lapok száma tehát $\frac{60}{5} = 12$.
Egy csúcsba 3 él, a 20 csúcsba $20 \cdot 3 = 60$ él fut be. De mivel minden élhez 2 csúcs tartozik, ezért minden élt 2-szer számoltunk. Az élek száma tehát $\frac{60}{2} = 30$.

Vegyes feladatok

407. Bármely csapat lejátszott mérkőzéseinek száma 0, 1, 2, … , 9 lehet; de a 0 és 9 együtt nem lehetséges. Ha valamelyik csapat már lejátszott 9 mérkőzést, akkor az összes többivel találkozott, s nem lehet olyan csapat, amelyik egyetlen mérkőzést sem játszott.
Tehát 9-féle lehetőség adódik a mérkőzésszámokra, s mivel 10 csapat játszik, a skatulyaelv miatt lesz közöttük kettő, amelyik ugyanannyi mérkőzést játszott.
Az állítás 10 helyett tetszőleges számú csapatra igaz, hasonló gondolatmenettel igazolhatjuk.

408. Ha minden csapat csak 2 mérkőzést játszott volna, akkor a mérkőzések száma $\frac{10 \cdot 2}{2} = 10$ lenne, ezért van olyan csapat, amelyik már legalább háromszor játszott.
Általánosítás: ha n csapat körmérkőzéses versenyén legalább $n + 1$ mérkőzést már lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik legalább háromszor játszott.

409. Ha minden csapat csak 3 mérkőzést játszott volna, akkor a mérkőzések száma $\frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ lenne. Tehát ha 25 mérkőzés már lezajlott, van olyan csapat, amelyik legalább négy mérkőzést már lejátszott.

410. A két szám egyenlő, hiszen minden egyes táncot a fiúknál és a lányoknál is beszámítottunk.

411. A legtöbb metszéspontot akkor kapjuk, ha semelyik két átló metszéspontján nem megy át harmadik átló. Ekkor bármely négy csúcs egyértelműen meghatároz egy metszéspontot, ezért az átlók metszéspontjainak maximális száma $\binom{n}{4}$.

412. Az n pontú teljes gráfnak $\binom{n}{2}$ éle van. Ha a gráf csúcsai számozottak, akkor mindegyik él két „állapotú” lehet: vagy éle a gráfnak, vagy nem, egymástól függetlenül. Az n pontú, számozott csúcsú egyszerű gráfok száma ezért $2^{\binom{n}{2}}$.

413.
1. Hamis; ellenpélda lehet pl. a két darab háromszögből álló 6 pontú gráf, illetve az a 6 pontú gráf, amelyik egyetlen kör.
2. Hamis; a gráfban lehet pl. hurokél.
3. Igaz.
4. Igaz.
5. Hamis, pl. az 1. példa alapján.
6. Hamis, ugyanazért.
7. Igaz.
8. Hamis; hurokélek felvételével bármely pont fokszáma önmagában változtatható.
9. Igaz.
10. Igaz.

414. Egyenlők; a befutó, illetve kifutó élek összege is az élek számát adja. Minden irányított él 1-1 értékkel növeli a befutó, illetve kifutó élek fokszámainak összegét.

415. Igaz. A poliéderek csúcs–él gráfjában is teljesül, hogy a páratlan fokú pontok száma páros. (Az állítás konkáv poliéderekre is igaz.)

416. *a)* Pl. a háromszöglapok és az eredeti kocka csúcsai között egyértelmű megfeleltetés lehetséges, így a háromszöglapok száma $H = 8$.
A „csonkolt kocka” és az eredeti kocka lapjait is párosíthatjuk, így a négyzetlapok száma $N = 6$.

b) Az élek száma: $\dfrac{H \cdot 3 + N \cdot 4}{2} = 24$, a csúcsok száma $\dfrac{H \cdot 3 + N \cdot 4}{4} = 12$ (minden csúcsban 4 lap találkozik).

Ügyesebb eljárás a párosítás: a kocka egy-egy lapján a „csonkolt kockának” 4 éle van; s a kocka egy-egy élén a „csonkolt kockának” egy csúcsa.

417. A szén 4, a hidrogén 1 vegyértékű. Ezért a szénhidrogén-molekula gráfjában a szénatomoknak negyedfokú, a hidrogénatomoknak elsőfokú pontok felelnek meg. Mivel minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros, az állítás igaz.

418. A két szám egyenlő.

419. Ha még nem fejezte be senki sem a versenyt, akkor legfeljebb 14 résztvevő 13 mérkőzést játszott és egy résztvevő 12-t. Ekkor az össz mérkőzésszám $\frac{14 \cdot 13 + 12}{2} = 97$. Mivel ennél több mérkőzés történt, valaki 14 mérkőzést játszott, tehát befejezte a versenyt.

420. Ahhoz, hogy mindenki mindenkivel egyszer játsszon, $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ mérkőzésre van szükség. 4 tag egymás közötti körmérkőzésén 6 játszmát vált, így a 21. napon vannak olyan tagjai a rajnak, akik legalább kétszer mérkőztek egymással.

421. A feladat állítása $2n$ számú telefonközpont és n közvetlen összeköttetés esetén is igaz.

Legyen a gráfmodell a következő: a telefonközpontok a gráf pontjai, és két pontot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő központok között van összeköttetés. Ekkor a feladat annak bizonyítása, hogy a gráf összefüggő.

Indirekt tegyük fel, hogy a gráf 1-nél több komponensből áll! Ekkor van olyan komponens, amelyben legfeljebb n pont van; viszont ebben a komponensben a pontok fokszáma legfeljebb $n - 1$ lehet. Ez ellentmondás, így a gráf valóban összefüggő.

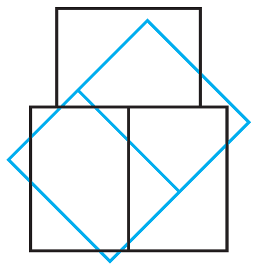
422. Nem igaz. Ellenpélda az a két komponensű gráf, amelyben mindkét komponens teljes n-gráf.

423. *a)* és *c)*: Nem lehetséges. *b)* és *d)* Lehetséges.

c) Az érintkezéseket számoljuk meg. Ha mindegyik skatulya 3 másikat érint, akkor ez $5 \cdot 3 = 15$ érintkezést jelent. Minden „kapcsolatot” 2-szer számoltunk, de $\frac{15}{2}$ nem egész szám.

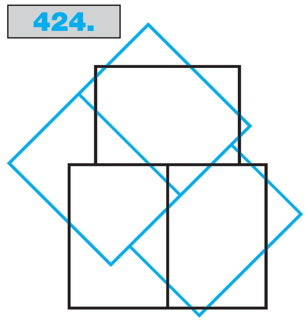
d) Az ábra szemléltet egy lehetséges megoldást.

423.



424. Mindegyik konstrukció megvalósítható. Pl. az *e)* esetet az ábra szemlélteti.

424.

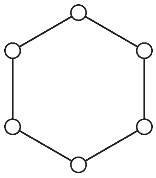


425. A feladatok tisztán gráfelméleti jellegűek voltak, objektumok és közöttük lévő kapcsolatokról szóltak. (Pl. a gráf pontjai a skatulyák voltak, s akkor kötünk össze két pontot éllel, ha a nekik megfelelő skatulyák belső pontban érintkeznek.) Ezért az eredmény nem függ sem a szomszédsági definíciótól, sem a skatulyák alakjától. (Nem oldható meg a feladat pl. akkor sem, ha az üres skatulyát ki lehet nyitni.)

Összefüggő gráfok, fa, kör

II

426.



426. *a)* 5. Kevesebb vonal nem elég. Ha egy gráffal modellezzük a telefonhálózatot (a városok pontok, az élek telefonösszeköttetések), 5-nél kevesebb éllel nem lenne összefüggő a gráf.

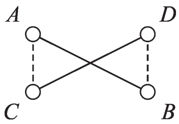
b) 6 vonal elég. Az ábrán lévő gráfra teljesül, hogy ha bármelyik élét elhagyjuk, továbbra is összefüggő marad.

427. Az első körben 16, utána 8, majd 4, 2, végül 1 mérkőzést játszanak, összesen 31-et.

428. A mérkőzésszám $10 + 5 + 2 + 1 + 1 = 19$.
Általában is igaz, hogy n csapat esetén $n - 1$ mérkőzés szükséges a győztes csapat megállapításához. Minden mérkőzés vesztese kiesik, s $n - 1$ számú vesztes meghatározza a győztest.

429. Mind a három gráf három komponensből áll, ezért két további (alkalmasan választott) mérkőzésre van szükség. Az első mérkőzés után két komponens marad, a második után már csak egy lesz, s ekkor el is dönthető a sorrend. (Feltételezzük, hogy az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet.)

430.



430. *a)* Tegyük fel, hogy az AB és CD szakaszok metszik egymást.
Ekkor vegyük fel az AB és CD élek helyett az AC és BD szakaszokat! Ezek összege a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint AB és CD összege, tehát egyikük kisebb, mint AB vagy CD. Ellentmondás.

b) Tegyük fel, hogy létrejön egy ABC háromszög, s ebben a leghosszabb él pl. AB. Ezt azonban sem A-ból, sem B-ből nem húzhattuk be, mert AC és BC is kisebb.

c) A zárt töröttvonal leghosszabb szakaszát nem húzhatjuk be.

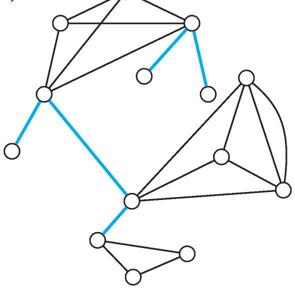
d) Igen, ha pl. két egymáshoz „közeli” pont elég „távol” van a többi ponttól, s külön komponenst alkot.

431. *a)* A feladat 34 vágással könnyen megoldható. Kevesebbel nem lehet: kezdetben egy darab csokoládé van, s minden vágás az összdarabszámot eggyel növeli.

b) Minden vágás a meglévő csokidarabok számát legfeljebb megkétszerezheti, ezért legalább 6 vágásra szükség van ($2^5 = 32 < 35$). Ha közelítőleg a felezéses technikát alkalmazzuk, nem nehéz a konkrét darabolást megadni. (Arra kell csak ügyelni, hogy a vágások előtt a darabokat egymásra vagy alkalmasan egymás mellé pakoljuk.)

432/a.

a)



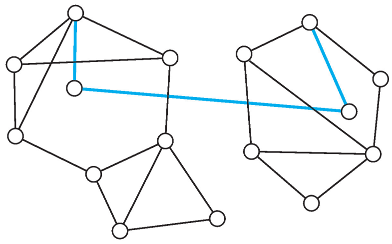
432. Minden él megszüntetése legfeljebb eggyel növeli a komponensek számát, tehát legalább 5 vágás szükséges.

a) Az ábrán kékkel jelölt éleket elvágva a gráf 6 komponensre esik szét, tehát az 5 vágás elegendő.

b) Az ábrán kékkel jelölt éleket elhagyva a gráf négy komponensre esik szét. Ezután azonban további két komponenst csak négy él elvágásával kaphatunk; összesen 7 vágás kell.

432/b.

b)



433. Minden méréssel legfeljebb egy érmét zárhatunk ki.

434. Kezdetben tekintsünk n izolált pontot, ekkor a gráf n komponensből áll. Ezután minden él felvételével legfeljebb 1-gyel csökken a komponensek száma, így az összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

435. Mivel a gráf $k-1$ él behúzásával összefüggővé tehető, az élek száma legalább $n-1-(k-1)=n-k$.

Az egyes komponensek között nem futnak élek. Két komponens esetén akkor marad ki a legkevesebb él, ha az egyik komponens izolált pont, a másik teljes gráf. Ez igaz több komponens esetén is, vagyis az élek száma akkor maximális, ha $k-1$ komponens mindegyike egyetlen izolált pontból áll, a k. komponens pedig $n-k+1$ pontú teljes gráf.

436. A 9 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{9\cdot 8}{2}=36$.

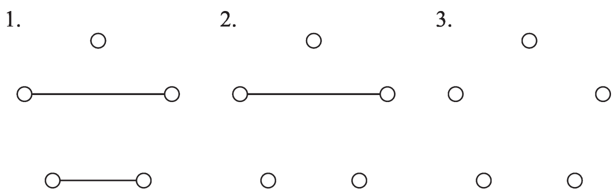
437. Ha a gráf éleinek száma nagyobb, mint $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, akkor a gráf – az előző feladatok megoldása alapján – összefüggő; ha az élek száma $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, akkor ellenpélda az $(n-1)$ pontú teljes gráfból és egy izolált pontból álló gráf.

438. Minden komponens legalább 4 pontból áll. Egyetlen megfelelő gráf van, amelynek komponensei 4 pontú teljes gráfok.

439. A gráf egyik komponense csak a 4 pontú teljes gráf lehet, a másik 5 pontú gráf. Ebben – mivel minden pont foka legalább 3 – legalább 8 él van. Az élek száma tehát 8, 9, 10 lehet. A komplementer gráfokat tekintve három lehetőség van (ábra).

(A 2 élű 1-es típusból csak egy darab van; ugyanis egy pontból nem indulhat ki 2 él a fokszámokra vonatkozó feltétel miatt.)

439.

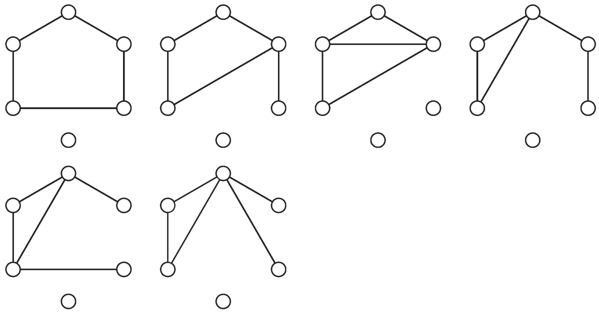


440. Ha a gráf két komponensből áll, egy izolált pontból és egy 6 pontú teljes gráfból, az élek száma 15. Kettőnél több komponens esetén nem érhető el ez az élszám, így egyetlen megfelelő gráf van.

441. *a)* 1. A gráf két komponensből áll, egy izolált pontból és egy olyan 6 pontú gráfból, amely egyetlen él híján teljes.

II

441.



b) 2. Az előzőhöz hasonlóan két él hiányzik a teljes 6 pontú gráfból.
c) 7. A 6 pontú, 10 élű gráfok komplementereit tekintve a 6 pontú, 5 élű gráfok az ábrán láthatók (összesen 6 darab). (Az izolált pont létezése miatt tulajdonképpen az összes 5 pontú, 5 élű egyszerű gráfot kerestük meg.)
Ezen kívül egy gráf van még, a két izolált pontból és az 5 pontú teljes gráfból álló.

442. Igaz. Ha egy gráffal modellezzük a telefonhálózatot (a telefonközpontok pontok, az élek telefonkapcsolatok), legalább $n - 1$ él szükséges ahhoz, hogy a gráf összefüggő legyen.

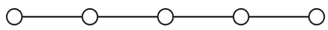
443. *a)* 15.
b) $15 + 3 = 18$. Ha a játékosokat 8, majd a győzteseket 4, 2, végül 1 párba állítjuk, a második legjobb játékos csak a verseny győztesétől kaphatott ki. Így 4 lehetséges játékos közül kell a legjobbat kiválasztani, ehhez további 3 mérkőzés kell.
c) $15 + 3 + 7 = 25$. A leggyengébb az első körben vereséget szenvedett 8 játékos közül kerülhet ki, meghatározásához további 7 mérkőzés elegendő.

444. *a)* 15 mérkőzés szükséges a győztes meghatározásához.
b) Szerencsés esetben megtudtuk a második legjobb személyét is, balszerencsés esetben 14 további mérkőzésre van szükség.
c) Szerencsés esetben megismertük a leggyengébb játékost is, balszerencsés esetben 13 további mérkőzésre van szükség.

445. *a)–e)* Igaz. *f)* 105. *g)* Nem; ellenpélda az egyetlen pontból álló gráf.

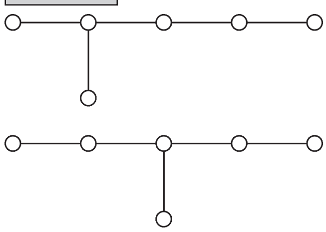
446. A 6 csúcsú fáknak 5 éle van. Számoljuk össze a gráfokat pl. a leghosszabb út hossza alapján!

446/I.



Ha a leghosszabb út hossza 5, egyetlen gráf van. (I. ábra).

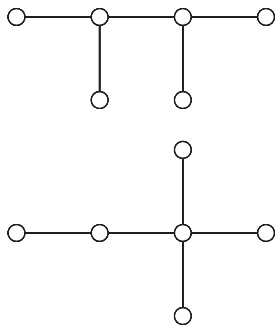
446/II.



Ha a leghosszabb út hossza 4, két gráf van (II. ábra).

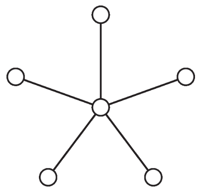
Ha a leghosszabb út hossza 3, két gráf van (III. ábra).

446/III.



Ha a leghosszabb út hossza 2, egy gráf van (IV. ábra).

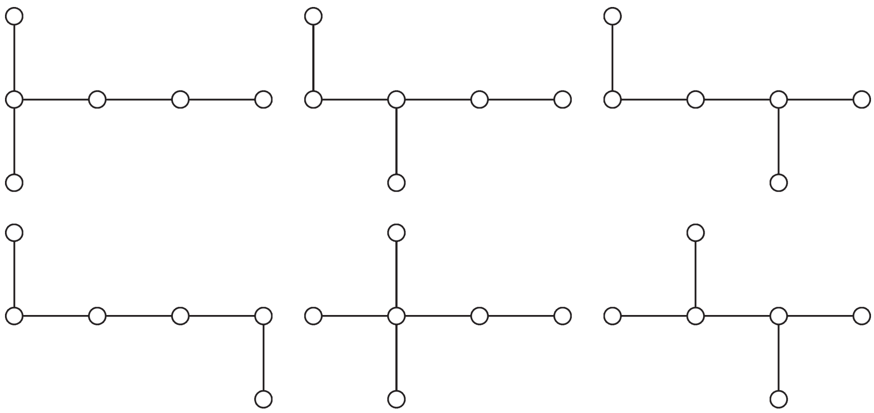
446/IV.



Összesen 6 darab 6 pontú fa van.

447. Jellemezzük a kocka kiterített hálózatát olyan gráffal, amelyben a gráf pontjai a kocka lapjai, a gráf élei pedig csatlakozó kockalapok éleinek felelnek meg! Ekkor 6 pontú fagráfot kapunk, melyben bármely pont foka legfeljebb 4 lehet. 4 ciklikusan csatlakozó lap esetén 6 lehetőség van (I. ábra):

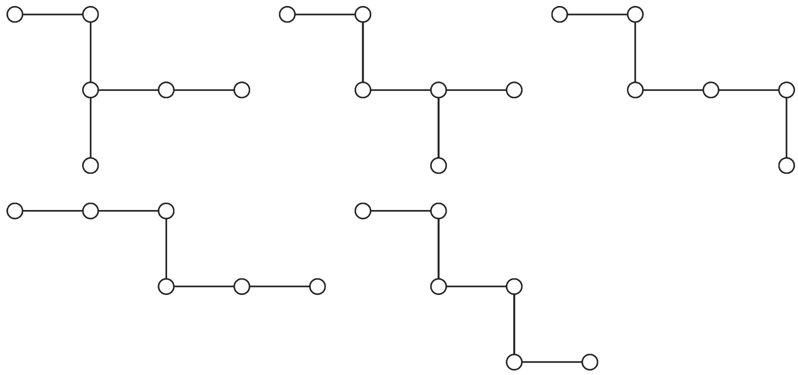
447/I.



További 5 lehetőség (II. ábra):

447/II.

II

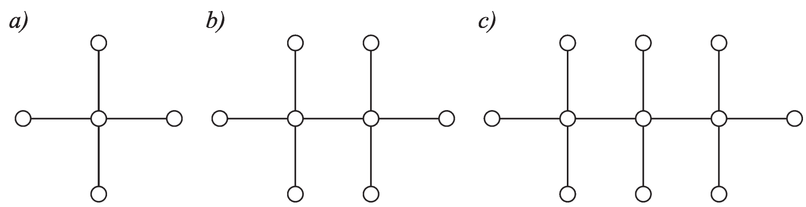


Összesen 11, lényegesen különböző hálózata van a kockának.

448. Az előző feladat megoldása alapján a kocka hálózata egy 6 pontú fagráffal szemléltethető, melyben a gráf élei az eredeti kocka éleinek felelnek meg. Mivel ebben a gráfban 5 él van, a kocka 12 éléből 7-et kell felvágni.

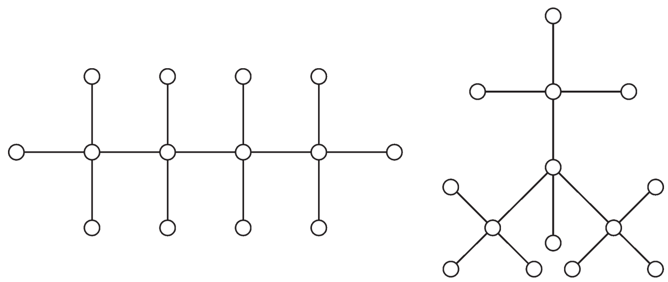
449. *a)* *b)* *c)*

449/a)–c)



A *d)* esetben két gráf is rajzolható. (A második molekula neve izobután.)

449/d)



450. A modell összefüggő gráf. Pontjainak száma $n + 2n + 2 = 3n + 2$, éleinek száma $\dfrac{4n + 2n + 2}{2} = 3n + 1$, vagyis valóban fa.

451. *a)* Van benne kör. Ugyanis egy tetszőleges pontból elindulva és a gráf (még be nem járt) élein haladva előbb-utóbb záródik az utunk.

b) Ha a gráf pontjainak száma n, akkor van benne n hosszú kör.

452. Igaz.

453. A *b)* állítás az igaz. Ha a gráf egyetlen kör, akkor megállapítható a győztes személye; de ha pl. két kör van a gráfban, akkor nem.

454. Igaz.

455. 6 útszakasz szükséges.

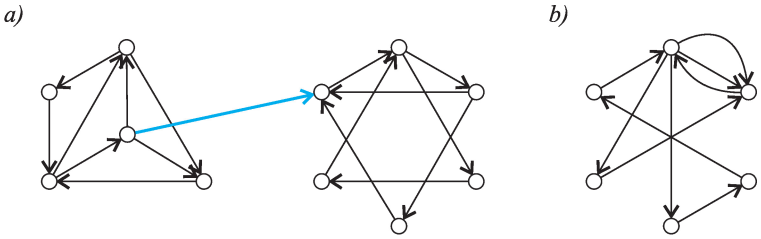
456. *a)* 1 hosszú kör 1 (a hurokél); 3 hosszú 5; 4 hosszú 5; 5 hosszú 2 van. Összesen 13 darab.

b) 3 hosszú kör 3; 4 hosszú 1 van. Összesen 4 darab.

c) 2 hosszú kör 3; 3 hosszú 3; 4 hosszú 1 van. Összesen 7 darab.

457. *a)* Az ábrán kékkel jelölt él egy 5 és egy 6 pontú részre bontja a gráfot.

457.



Az első részben 3 darab 3 hosszú és 1 darab 4 hosszú irányított kör van; a második részben 2 darab 3 hosszú és 1 darab 4 hosszú. Összesen 7 darab.

b) 2 darab 2 hosszú;1 darab 3 hosszú; 1 darab 4 hosszú; összesen 4 darab.

458. *a)* Igaz; $k - 1$ további élt behúzva a gráf összefüggővé tehető.

b) Igaz.

c) Igaz.

d) Hamis; ellenpélda pl. az a két komponensű gráf, melynek mindkét komponense háromszög.

e) Igaz. Bizonyíthatunk pl. teljes indukcióval.

f) Hamis. Pl. egy háromszög egyik csúcsát összekötjük egy további ponttal.

g) Igaz.

h) Igaz.

i) Igaz.

j) Hamis; ellenpélda pl. egy 5 pontú fa, amelyben a fokszámok 1, 1, 1, 1, 4.

k) Igaz.

459. Teljes indukcióval bizonyíthatunk.

Az állítás $n = 1$-re teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, s mutassuk meg, hogy akkor igaz $n = k + 1$-re is!

Legyen tehát G egy $k + 1$ pontú gráf, melynek legalább $k + 1$ éle van, s tekintsük G leghosszabb útját! Ha a leghosszabb út valamely végpontja nem elsőfokú, akkor van G-ben kör; ha elsőfokú, akkor töröljük a pontot a hozzá illeszkedő éllel együtt. Az így kapott gráfnak k pontja és legalább k éle van, tehát az indukciós feltevés szerint tartalmaz kört, s ez G-ben is benne van.

Megjegyzés:
Okoskodhatunk indirekt módon is. Ha a körmentes gráfnak k komponense van, akkor éleinek száma $n - k$. Ellentmondást kaptunk, hiszen az élek száma kisebb, mint n.

460. Vagy a gráfban, vagy a komplementerében (esetleg mindkettőben) van 5 él, így van kör is.
Az állítás $n > 5$ esetén igaz marad, $n < 5$ esetén nem.

461. Ha a kék pontokból álló (esetleg több) komponens és a piros pontokból álló (esetleg több) komponens között nem futna él, akkor a gráf nem lenne összefüggő.

462. Számozzuk be a csúcsokat 1, 2, 3, 4, 5-tel, s legyen pl. a kijelölt csúcs az 5-ös!
A 3 hosszú köröket úgy kaphatjuk meg, ha az 1, 2, 3, 4 elemekből 2-t kiválasztunk úgy, hogy figyelembe vesszük a kiválasztott elemek sorrendjét is. Ezt $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen tehetjük meg, ekkor azonban minden kört kétszer számoltunk (pl. az 512 és 521 ugyanazok), így a 3 hosszú körök száma 6. Hasonlóan a 4 hosszúak száma $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$; itt pl. nem különböztettük meg az 5123 és az 5321 köröket, de különbözőknek vettük az 5123 és 5213 köröket. Az 5 hosszú körök száma $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$, összesen tehát $6 + 12 + 12 = 30$ olyan kör van, amely tartalmazza az 5-ös csúcsot.

Általában n csúcsú teljes gráf esetén az n. csúcsot tartalmazó körök száma $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots 1}{2}$.

463. Számozzuk be a csúcsokat 1, 2, 3, 4, 5, 6-tal! A 3 hosszú köröket úgy kaphatjuk meg, ha ebből a hat elemből 3-at kiválasztunk úgy, hogy figyelembe vesszük a kiválasztott elemek sorrendjét is. Így $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sorozatot kapunk, azonban a körök száma kevesebb. Egyrészt minden kört kétszer számoltunk (pl. az 123 és 321), másrészt a sorozat ciklikus permutációi is ugyanazt a kört adják: 123, 231, 312. Így a 3 hosszú körök száma $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$.
Hasonló megfontolással a 4 hosszú körök száma $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 45$, az 5 hosszú körök száma $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 72$, a 6 hosszú körök száma $\frac{6!}{2 \cdot 6} = 60$. Összesen $20 + 45 + 72 + 60 = 197$ köre van a gráfnak.

Általában n csúcsú teljes gráf esetén a körök száma

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{2\cdot n}.$$

464. Gráfelméleti megfogalmazásban az állítás úgy szól, hogy ha egy gráfban minden pont foka k, akkor található a gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör.

Ennek bizonyítására tekintsük a gráf leghosszabb $A_1-A_2-\ldots-A_m$ útját, ahol $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a gráf pontjait jelentik! A_1 minden szomszédja az $A_2, A_3, \ldots, A_m$ pontokból kerül ki (egyébként nem lenne $A_1-A_2-\ldots-A_m$ a *leghosszabb* út), s mivel k szomszédja van, van olyan A_j szomszédja, amelynek indexére $j>k$. Ekkor az $A_1-A_2-\ldots-A_j-A_1$ kör hossza k-nál nagyobb.

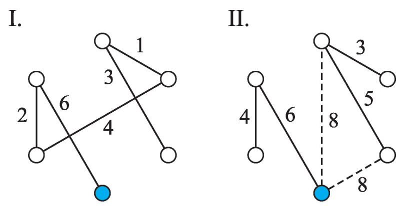
465. Helyezzük a megállót a balról harmadik bekötőút és a főútvonal kereszteződésébe! Ekkor minimális lesz az iskolások által megtett utak összege. Ha ugyanis pl. x távolsággal jobbra helyeznénk a megállót, a tőle balra lakó $11+6+12=29$ diák összesen $29x$-nyi úttal többet tenne meg; míg a megállótól jobbra lakó $5+6+12+5=28$ diák $28x$-nyi úttal kevesebbet.

További adatokra nincs szükség; sőt, a bekötőutak egymástól mért távolságai is felesleges adatok.

466. *a)* Az 1. feltétel a gráf összefüggőségét, a 2. feltétel a körmentességet követeli meg.

b) Az alábbi ábrákon láthatjuk a leggazdaságosabban megépíthető rendszereket. (A II. esetben két gráf is van.)

466.

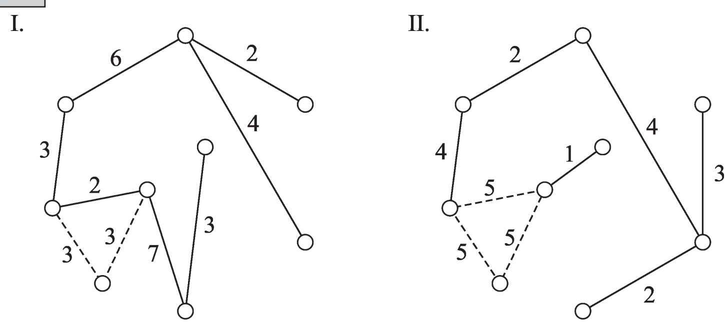


467. Ugyanazt a favázat kapjuk.

468. Ugyanazt a favázat kapjuk.

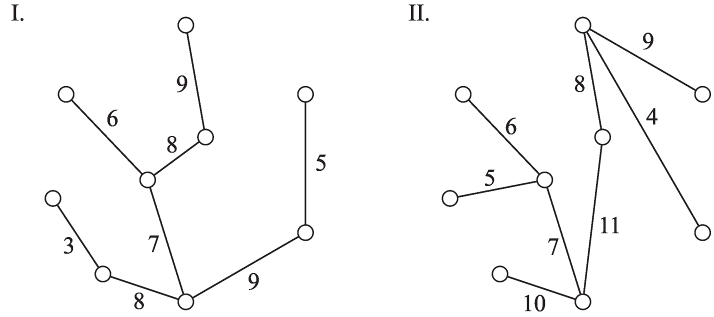
469. Az I. esetben a minimális költség 27, két megoldás van; a II. esetben a minimális költség 26, három megoldás is van (ábra).

469.



470. Egy-egy maximális költségű faváz az ábrán látható.

470.



471. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő; ekkor azt kell megmutatnunk, hogy bármely két pontja, pl. A és B között $\overline{G}$-ben van út.
Ha A és B G két különböző komponenséhez tartozik, akkor nyilván van közöttük 1 hosszú út (él).
Ha A és B G azonos komponensében van, akkor tekintsünk egy másik komponenshez tartozó C pontot, s ekkor az $A-C-B$ komponensek között futó útvonal megfelelő lesz.
472. Az állítás az előző feladat következménye.
473. Ha a gráf 1-nél több komponensből állna, akkor volna olyan komponens, amelyben legfeljebb n pont van. Mivel ebben a komponensben a pontok fokszáma legfeljebb $n-1$ lehet, ellentmondást kaptunk; a gráf valóban összefüggő.
474. Tudjuk, hogy a gráfban van kör. Ha ennek a K körnek egy élét elhagyjuk, akkor a gráf összefüggő marad $n-1$ éllel, tehát fa lesz; vagyis K-n kívül más kört nem tartalmazhat.
475. *a)* Kör nem jöhet létre, ezért a maximális szám 9. Ez elérhető, ha pl. egy egyenesen vesszük fel az 1., 2., … , 10. pontot úgy, hogy a közöttük lévő távolságok egyre nagyobbak legyenek.
A fokszámok összege 10, ezért a minimális szám 5. Ez elérhető 5 darab 2 pontból álló olyan komponenssel, amelyek „elég messze” vannak egymástól.
b) Igen, az első konstrukció fokozatosan elérhető, ha pl. az 5 darab komponens is egy egyenesre esik.
476. A gráfmodellben jelöljük piros és kék pontokkal a két párt tagjait, élekkel a barátokat. A feladat annak bizonyítása, hogy a gráfban van piros és kék pont közötti él, így a feladat megegyezik a 461. feladattal.
477. A feladat megegyezik a 464. feladattal.
478. *a)* A tagoknak pontokat, az ismeretségeknek éleket feleltethetünk meg; a feladat annak bizonyítása, hogy a gráfban van 5 hosszú kör.
A gráfban legalább 8 él van, s legalább egy pont foka 4. Ezt a pontot és a hozzá tartozó éleket elhagyva a maradék 4 pont mindegyike legalább másodfokú, így van közöttük 4 hosszú kör. Ebbe a körbe

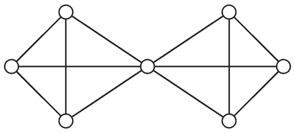
II

bármely két pont közé „becsatlakoztathatjuk” az ötödik pontot.

b) Igaz. A gráfban van 4 vagy 5 hosszú kör; ekkor megmutathatjuk, hogy mindkét esetben a körök 6 hosszúvá bővíthetők.

c) Nem igaz. Ellenpélda látható az ábrán.

478.



479. A balról 3. és 4. bekötőút és a főútvonal kereszteződésébe, valamint közéjük bárhová helyezhetjük a megállót.

480. *a)* 7.

b) Legolcsóbb az $A - F - H - E - C - B$ lánchoz H-ban G-t és E-ben D-t csatlakoztatni. Ekkor a költség $3 + 5 + 4 + 3 + 4 + 2 + 2 = 23$.
A költség nyilván nem csökkenthető, hiszen ez a 7 vezeték az összes között a legolcsóbb.

c) Csak egy megoldás van; az FH vezetéket nem lehet sem a DH, sem a CD vezetékkel helyettesíteni.

481. Legyen A a G gráf egy legalább harmadfokú pontja, a belőle kiinduló három él pedig AB, AC, AD. Ha a B, C, D pontok közül valamely kettő között van él, akkor ez a két pont A-val együtt háromszöget alkot; ha pedig semelyik kettő között nincs él, akkor G komplementerében B, C, D háromszög.

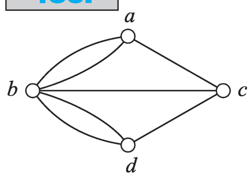
482. A gráf egy tetszőleges A pontjából 5 él indulhat ki, ezért vagy a gráfban, vagy a komplementerében ez a pont legalább harmadfokú. Ezután alkalmazhatjuk az előző feladat megoldásának gondolatmenetét. Legyen pl. a gráfban három él AB, AC, AD. Ha a B, C, D pontok között van él, pl. B és C között, akkor $A - B - C$ háromszög; ha pedig nincs közöttük él, akkor a komplementer gráfban alkotnak háromszöget.
Az állítás igaz hatnál több csúcsú gráfokra is, de nem igaz az 5 pontú gráfra. Ellenpélda az egyetlen, 5 hosszú körből álló gráf.

Gráfok bejárása, Euler-féle poliéder tétel

Élek bejárása

483. Az ábra szerinti a, b, c, d partokat és szigeteket tekinthetjük egy gráf csúcsainak, az őket összekötő hidakat pedig a gráf éleinek. Ekkor a feladat átfogalmazható: be tudjuk-e járni az alábbi gráf éleit úgy, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig? (Vagy: megrajzolhatók-e a gráf élei egyetlen ceruzavonással, a ceruza felemelése nélkül?)

483.



Euler észrevette, hogy ha a bejárás közben a gráfnak egy pontján áthalad, akkor mindig két, a ponthoz illeszkedő élt jár be. Vagyis ha az éleket sikerült bejárnunk, és visszajutottunk a kiindulási pontba, akkor minden pont foka páros; míg ha nem a kiindulási pontban fejeztük be a bejárást, akkor a kezdő és végpontok fokszáma páratlan, a többi csúcs fokszáma páros. Viszonylag könnyen megmutatható, hogy ezek a feltételek összefüggő gráfban elégségesek is. Ez alapján már látható, hogy a polgárok kívánságának megfelelő séta nem létezik: az a, b, c, d pontok fokszáma páratlan.

II

484. A termekbe általában páros számú ajtó nyílik, kivéve az ábra szerinti bal alsó szobát, ahová három. Így a séta csak itt fejeződhet be, ez a trónterem.

485. *a)* A 6 csomópont közül két páratlan fokszámú van. A rajzolás csak úgy lehetséges, ha a két alsó pont egyikéből kezdődik és a másikban fejeződik be.

b) Ugyanaz a helyzet: két ötödfokú pont egyikéből kezdődhet és a másikban végződhet a rajzolás.

c) Mind a tíz pont páros fokszámú, így bárhonnan kezdve mindig megrajzolható az ábra.

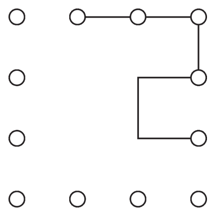
486. *a)* Pl. 4 cérnát vízszintesen és 4-et függőlegesen helyezünk el.

b) A 16 rácspontból 8 darab 3 fokú, 4-4 fokszáma 2, illetve 4. A 4 darab cérnának 8 vége van, így csak olyan kirakások lehetségesek, amelyekben a 8 páratlan fokú pont közül 1-1 pontban kezdődik és végződik minden cérna. Megfelelő pl. a 486/b. ábra és 90°-os elforgatottjai.

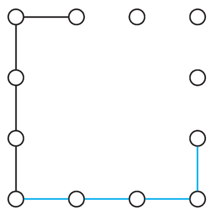
c) Megfelelő pl. a 486/c. ábrán látható cérnadarabok további 2-2 eltoltja.

d) Nem lehetséges; a 3 cérnának csak 6 vége van, míg a páratlan fokú pontok száma 8.

486/b.

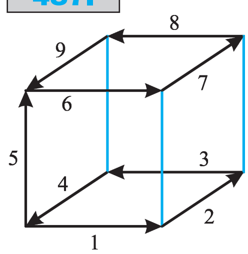


486/c.



487. A kocka élvázát gráfnak tekintve nyolc harmadfokú pontot kapunk, így legalább négy drótdarab kell. Ennyi elég is, ha egy darabbal a maximális 9 hosszú élsorozatot pl. az ábrán látható módon hozzuk létre.

487.



488. Ha n páratlan. (Ekkor minden csúcs foka páros.)

489. *a)* Hamis. (Csak ha a gráf összefüggő.)

b) Igaz.

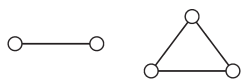
c) Igaz.

d) Hamis. (Ha 1 páratlan fokú pont van, nem lehetséges a rajzolás.)

e) Hamis. Ellenpélda pl. az ábrán látható két komponensű gráf.

f) Igaz.

489.



490. A B pontból indult (a 3 kimenő és 2 bemenő nyíl miatt) és az E pontban van most (2 kimenő és 3 bemenő nyíl).

491. *a)* $\binom{9}{2} + 9 = 45$.

b) A dominólapokat jelölhetjük a $\{0,0\}$, $\{0,1\}$, …, $\{8,8\}$ módon. Egy csatlakozó dominólapokból álló lánc lehet pl. $\{1,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,2\}$, $\{2,5\}$, $\{5,8\}$ stb. Ezeket a szimbólumokat úgy is felfoghatjuk, mint egy 9 pontú gráf éleinek sorozatát (a gráf csúcsait $0, 1, 2, \ldots, 8$-cal, a 0 és 1 csúcs közötti élt $\{0,1\}$-gyel jelölhetjük stb.). Vagyis ha kihagyjuk a $\{0,0\}$, $\{1,1\}$, …, $\{9,9\}$ lapokat, akkor bármely dominólánc létrehozása megfeleltethető a 9 pontú gráf egy csatlakozó élsorozata bejárásának.

A teljes 9 gráfban minden pont foka páros, így minden éle bejárható, s mivel utólag elhelyezhetők a láncban az $\{i, i\}$ típusú lapok (pl. az $\{1, 3\}$, $\{3, 4\}$ lapok közé beszúrható a $\{3, 3\}$ lap), így az összes dominólapból készíthető lánc.

c) Az összes dominólapból zárt körláncot készíthetünk, így a lánc másik végén is 5-ös szám van.

Csúcsok bejárása

492. Nem.

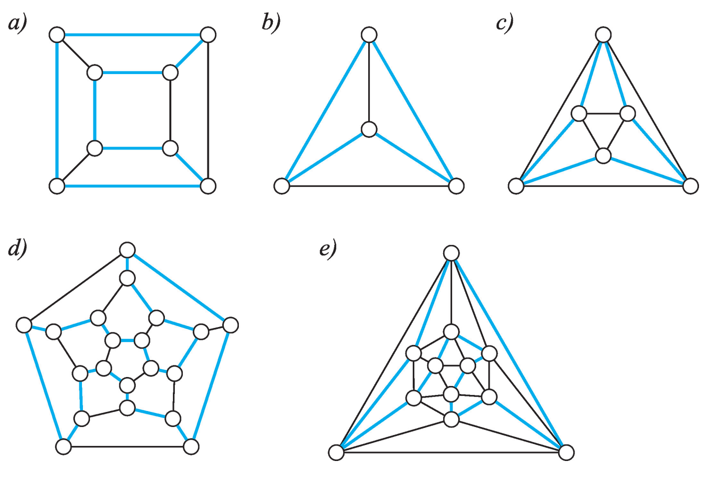
Csak akkor létezhet bejárás, ha az egyik sarokmezőről indulunk, és a másikba érkezünk. Ha pl. az *a1* mezőről indulva első lépéssel a *b2* mezőre lépünk, akkor az *a3* és *c1* mezők „elsőfokúvá” válnak, vagyis rájuk lépve szintén megszakad a bejárás.

493. *a)* Gondolatban színezzük be „sakktáblaszerűen” feketével és fehérrel a kis kockákat úgy, hogy a közös lappal érintkezők különböző színűek legyenek. Ha a középső kis kocka fekete, akkor 13 fekete és 14 fehér kockát kapunk. A bejárás folyamán a hangya felváltva lép fekete és fehér kockára, s mivel feketével kezd, nem tudja a nagy kockát bejárni.

b) Bármelyik fehér kockából indulhat. Először bejárja a nagy kocka egyik lapját, ezután átlép a vele párhuzamos $3 \times 3 \times 1$-es rétegre, majd ennek bejárása után az utolsó lapsík is bejárható.

494. Mindegyik szabályos test gráfjának van Hamilton-köre (és így Hamilton-útja is). Pl.:

494.

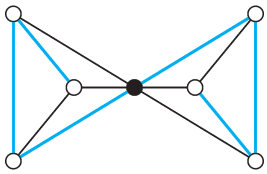


II

495. Ha egy gráfnak van Hamilton-köre, akkor a gráfból 1 pontot (és a hozzá tartozó éleket) törölve a gráf összefüggő marad; 2 pontot törölve, legfeljebb 2 komponensre eshet szét; általában k pontot törölve ($k \in \mathrm{N}^+$) legfeljebb k komponensre eshet szét.
Ha pedig egy gráfnak van Hamilton-útja, akkor a gráfból k pontot törölve legfeljebb $k + 1$ komponensre eshet szét.

a)

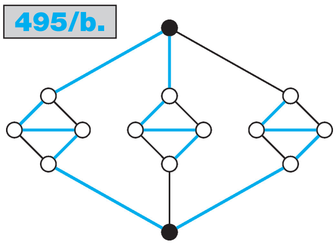
495/a.



Az ábráról egy Hamilton-út leolvasható. Mivel a feketével jelölt pontot törölve a gráf két komponensre esik szét, Hamilton-köre nincs.

b)

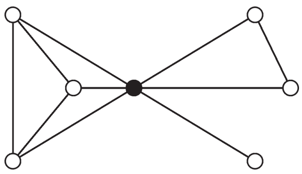
495/b.



Az ábráról egy Hamilton-út leolvasható. A feketével jelölt pontokat törölve a gráf három komponensre esik szét, így Hamilton-köre nincs.

c)

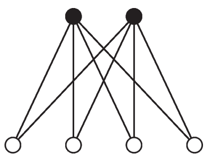
495/c.



A feketével jelölt pontot törölve a gráf három komponensre esik szét, így se Hamilton-útja, se Hamilton-köre nincs.

d)

495/d.



A feketével jelölt pontokat törölve a gráf négy komponensre esik szét, így se Hamilton-útja, se Hamilton-köre nincs.

496. *a)* Számozzuk be a csúcsokat 1, 2, 3, 4-gyel! A Hamilton-körben mindegyik csúcs benne van, ezért a kört kezdhetjük pl. az 1-es csúcsból. Innen háromféleképpen haladhatunk tovább ($1-2$, $1-3$, $1-4$); s ha a kör második eleme pl. a 2-es csúcs, akkor kétféleképpen folytathatjuk, s a befejezés egyértelmű ($1-2-3-4-1$ vagy $1-2-4-$ $-3-1$). 6 kört kaptunk, de 2-2 ugyanaz, csak ellentétes irányú. Összesen 3 Hamilton-köre van a tetraédernek.

b) Számozzuk be az alaplapon lévő csúcsokat 1, 2, 3, 4-gyel, s a párhuzamos lapon lévő csúcsokat 5, 6, 7, 8-cal (1-es felett az 5-ös csúcs van, 2-es felett a 6-os stb.) A kört kezdhetjük pl. az 1-es csúcsból; háromféleképpen haladhatunk tovább; s a második csúcsból két irányban folytathatjuk. Az így bejárt 6-féle út három csúcsa valamelyik lapon van, legyen pl. a bejárás $1-2-3$. Innen kétféleképpen léphetünk tovább.

Ha a negyedik csúcs a 4-es, akkor az 5-össel kell folytatni, s innen a befejezés egyértelmű: $1-2-3-4-8-7-6-5-1$. (Az $1-2-$ $-3-4-8-5-6-7$ Hamilton-út nem zárható körré.) Összesen 6-féle kört kaptunk.

Ha a negyedik csúcs a 7-es, akkor a Hamilton-útnak a 4-es csúcsban kell végződnie, s ez csak a $6-5-8-4$ befejezéssel lehetséges. Egyetlen Hamilton-kör van: $1-2-3-7-6-5-8-4-1$. Ebben az esetben is 6 kört kaptunk.

Összesen 12 kört számoltunk, de a kétféle irányítás miatt közöttük csak 6 különböző van.

497. *a)* Nem lehetséges, a középső mezőnek nincs kapcsolata a többivel.

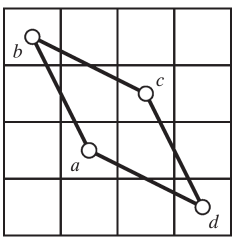
b) A tábla mezőit egy gráf csúcsainak, a lehetséges lépéseket a gráf éleinek tekintve figyeljük meg az I. ábra részgráfját!

A b vagy d sarokpontok csak a-ból vagy c-ből érhetők el. Ha a bejárás folyamán valamikor a-ra lépünk, akkor az $a-b-c-d$ vagy $a-d-$ $-c-b$ folytatás kötelező, s ekkor az a vagy d sarokban végződik az út. Mivel a tábla másik két sarokmezőjét tartalmazó hasonló részgráfot is felvehetünk, a bejárás nem lehetséges.

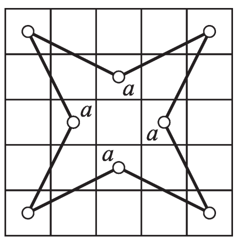
c) Tekintsük a II. részgráfot!

Ha a bejárás folyamán valamikor „kívülről” az a jelű pontokra lépünk, akkor ezen részgráf valamelyik irányú bejárásával kell befejeznünk az utat. Egy megoldást mutat a III. ábra.

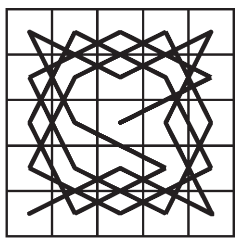
497/I.



497/II.



497/III.



II

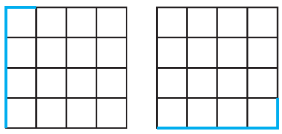
Vegyes feladatok

498. Nem érhető el. Ha a táblát sakktáblaszerűen fekete-fehérre színezzük úgy, hogy a bal alsó mező fekete legyen, akkor 13 mező fekete és 12 fehér lesz. A katicabogarak fehér mezőről feketére ugranak és fordítva, ezért a fehér mezők valamelyikére legalább két katica kerül.

499. *a)* Igen, pl. az alábbi ábrán látható cérnadarabok további 3-3 eltoltjával.

b) Nem lehetséges; az 5 cérnának csak 10 vége van, míg a rácsban 12 páratlan fokú pont van.

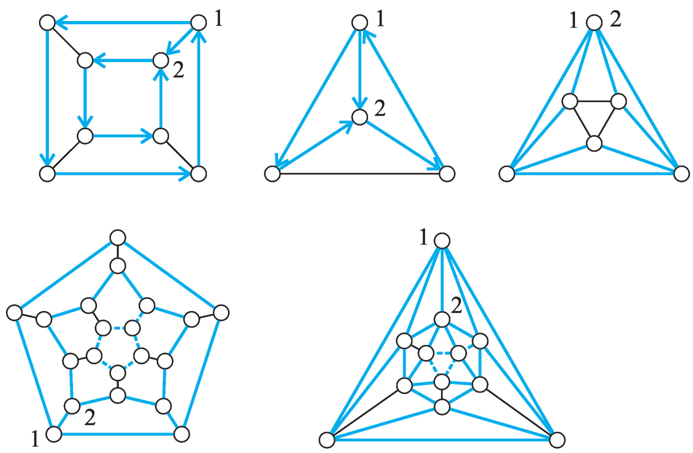
499.



500. A keletkezett összefüggő gráfban minden pont fokszáma páros.

501. Az élvázakat gráfoknak tekintve a tetraédernek 4, a kockának 8, az oktaédernek 0, a dodekaédernek 20, az ikozaédernek 12 páratlan fokszámú csúcsa van. A szükséges drótdarabok száma a tetraédernél 2, a kockánál 4, az oktaédernél 1, a dodekaédernél 10, az ikozaédernél 6. (Az alábbi ábrákról leolvasható, hogy ennyivel el is készíthető az élváz. Az első – kékkel jelölt – drótdarab az 1-essel jelölt csúcsból indul és a 2-essel jelöltben végződik.)

501.



502. Az irányítás nem lehetséges. Van olyan él (a feladat ábráján vastagon jelöltük), amit elhagyva a gráf két komponensre esik szét. Ez az él a két komponens között csak az egyik irányú utat engedi meg.

503. A két harmadfokú pontot kell összekötnünk. Ekkor a gráf minden pontja páros fokú, vagyis lesz benne (zárt) Euler-vonal, amit „egyirányúsíthatunk”.

504. *a)* Egy lehetséges megoldás a mellékelt ábráról olvasható le. (A bejárási stratégia alapján először mindig a tábla szélét próbáltuk bejárni.)

504.

12	19	4	27	14	21
3	34	13	20	5	28
18	11	26	35	22	15
33	2	17	8	29	6
10	25	36	31	16	23
1	32	9	24	7	30

b) A bejárás nem lehetséges. Ha a táblát sakktáblaszerűen fekete-fehérre színezzük úgy, hogy a bal alsó mező fekete legyen, akkor 25 mező fekete és 24 fehér lesz. A bejárás során minden lépésben fehér mezőről feketére és fordítva, fehérről feketére lépünk. Ha minden mezőt bejárunk, feketéről kell indulnunk és fekete mezőn is végezzük az utat, tehát nem zárhatjuk a kört.

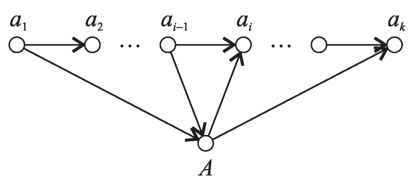
505. *a)* Az $\{i, j\}$ típusú dominólapokból $(i \neq j)$ $\binom{7}{2} = 21$ darab van. Az $\{1, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 2\}$, $\{2, 5\}$, $\{5, 8\}$ stb. dominóláncot felfoghatjuk úgy, mint egy 7 pontú gráf éleinek sorozatát (a gráf csúcsait 0, 1, 2, … , 6-tal, a 0 és 1 csúcs közötti élt $\{0, 1\}$-gyel jelölhetjük stb.). Ha kihagyjuk a $\{0, 0\}$, $\{1, 1\}$, … , $\{9, 9\}$ lapokat, akkor bármely dominólánc létrehozása megfeleltethető a 7 pontú gráf egy csatlakozó élsorozata bejárásának. A teljes 7 pontú gráfban minden pont foka páros, így van zárt Euler-vonala, vagyis a 21 dominókból záródó lánc készíthető. Az $\{i, i\}$ típusú lapok utólag is beszúrhatók a körbe, így az összes 28 darab dominóból készíthető lánc.

b) A dominólapok darabszáma $\binom{8}{2} + 8 = 36$. A 8 pontú teljes gráfban minden pont foka páratlan, így legalább 4 dominónak ki kell maradnia. Legfeljebb 32 hosszú lánc készíthető, kimaradnak pl. a $\{0, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6, 7\}$ dominók.

506. A mérkőzéssorozatnak egy 10 pontú, irányított teljes gráfot feleltethetünk meg, melyben a játékosokat pontokkal, a mérkőzéseket irányított élekkel (nyilakkal) reprezentálhatjuk. (Megállapodhatunk abban, hogy a gráfban a nyíl mindig a győztes felé mutat.)

Tegyük fel, hogy a kívánt módon nem sikerült az összes versenyzőt sorba rendezni. Tekintsünk ekkor egy maximális hosszú (tehát legfeljebb 9 pontból álló) láncot, jelöljük a benne lévő pontokat a_1, a_2, …, a_k-val, s egy láncon kívüli pontot A-val (ábra)!

506.



Nyilván $a_1 \to A$ és $A \to a_2$, ellenkező esetben nem lenne az $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k$ maximális hosszú irányított út. Keressük meg a legkisebb indexű a_i pontot, amelyre $A \to a_i$ (ilyen van, legfeljebb $i = k$).

Ekkor az $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_{i-1} \to A \to a_i \to a_{i+1} \to \ldots \to a_k$ láncot kapjuk, ami az eredeti (feltevésünk szerint maximális hosszú) láncnál hosszabb. Ellentmondást kaptunk; ebből következik, hogy mind a 10 versenyző sorba rendezhető.

507. Igaz. Az előző feladatbeli bizonyítás 10 pont helyett tetszőleges n csúcsú gráfra is elmondható.

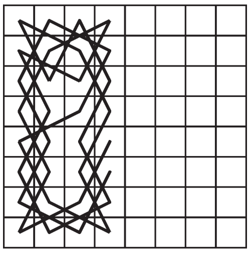
508. Például az alábbi két megoldás a 26. lépés után tér el:

34	21	46	9	32	19	44	7
47	10	33	20	45	8	31	18
22	35	56	59	40	43	6	61
11	48	41	64	57	60	17	30
36	23	58	55	42	39	62	5
49	12	25	38	63	54	29	16
24	37	2	51	14	27	4	53
1	50	13	26	3	52	15	28

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

509. Euler stratégiája szerint a tábla két felét külön-külön bejárhatjuk (I. ábra).

509/I.



Ha a tábla középpontjára tükrözzük ezt a bejárást, akkor a láncok szabad végei összeköthetők. Ekkor zárt bejárást kapunk (Hamilton-kör), tehát bármelyik mezőről indulhatunk.

Egy másik lehetséges megoldás, ha a táblát a II. ábra szerinti vastag vonalak mentén felosztjuk egy 2 széles, önmagába záródó gyűrűre. 16-16 mezőt megjelöltünk az a, b, c, d betűkkel.

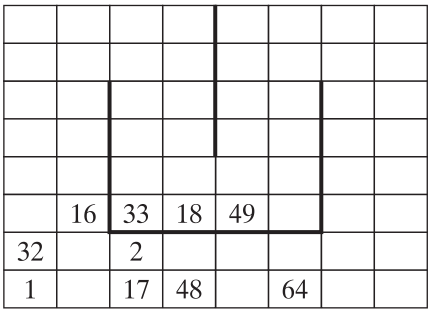
509/II.

a	*c*	*b*	*d*	*a*	*c*	*b*	*d*
b	*d*	*a*	*c*	*b*	*d*	*a*	*c*
c	*a*	*d*	*b*	*c*	*a*	*d*	*b*
d	*b*	*c*	*a*	*d*	*b*	*c*	*a*
a	*c*	*b*	*d*	*a*	*c*	*b*	*d*
b	*d*	*a*	*c*	*b*	*d*	*a*	*c*
c	*a*	*d*	*b*	*c*	*a*	*d*	*b*
d	*b*	*c*	*a*	*d*	*b*	*c*	*a*

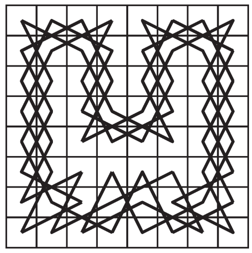
Az azonos betűkkel jelölt mezők a huszárral ciklikusan körbejárhatók, a huszár a kiindulási helyére érkezik vissza. Vagyis a négy részre osztás után a feladat csak annyi, hogy úgy járjuk be az azonos betűvel jelölt mezőket, hogy a 16 mező körbeérése után átléphessünk egy másik betűvel jelölt mezőre. Egy lehetséges megoldás csatlakozási pontjai, rendre az a, b, d, c jelű mezőket bejárva (III. ábra):

Egy ciklikus bejárás ugyanerre a felosztásra (az ún. váza alakzat, IV. ábra):

509/III.



509/IV.



Euler-féle poliédertétel

510. *a)* A csúcsok fokszámának összege páros szám, hiszen megegyezik az élek számának kétszeresével.

b) A lapok oldalszámainak összege páros szám, hiszen megegyezik az élek számának kétszeresével.

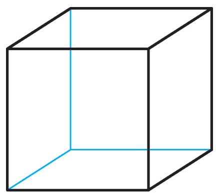
c) Ha a poliéder csúcsainak száma n, akkor a lehetséges fokszámok $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Mivel a 0 és $(n-1)$ fokszámok egymást kizárják, az n csúcs $(n-1)$-féle fokszámértéket vehet fel. A skatulyaelv miatt ezért van két azonos fokú csúcs.

d) Tekintsünk egy maximális oldalszámú lapot! Ha ez egy n-szög, akkor a hozzá csatlakozó n darab lap oldalszáma n-től 3-ig változhat, tehát lesz közöttük két egyforma oldalszámú lap.

511. A csúcsokban három négyzetlap találkozik. (Kevesebb nem lehet, hiszen minden poliéder csúcsaiba legalább három lapnak kell befutnia; ha pedig négy négyzet találkozna, akkor a négy közös csúcsú derékszög síkot feszít ki.)

Három, egymásra kölcsönösen merőleges négyzetlap által meghatározott térnyolcadot három másik lap egyértelműen zár le, így egyetlen négyzetekkel határolt szabályos testet kapunk, a kockát.

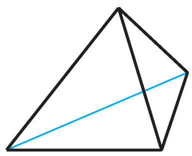
511.



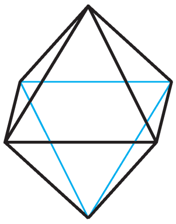
512. A szabályos háromszögek belső szöge 60°, így a szabályos test egy csúcsában három, négy vagy öt háromszöglap találkozhat; hat háromszöglap már kifeszítené a síkot.

a) (Ha minden csúcsban három lap találkozik):
Ekkor az egy csúcsban találkozó három lap egyértelműen zárható le egy negyedik lappal. A kapott négylapú szabályos test a tetraéder (‘tetra’: görög eredetű szó, jelentése ‘négy’).

512/a.



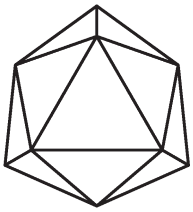
512/b.



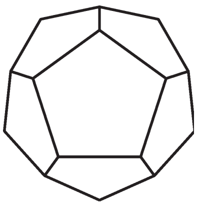
b) (Ha minden csúcsban négy lap találkozik):
Az egy csúcsból kiinduló négy lap alapélei négyzetet határoznak meg. Erre tükrösen helyezkedik el a másik négy lap. A nyolc háromszögből álló test az oktaéder. (‘Okta’ jelentése ‘nyolc.)

c) (Ha minden csúcsban öt lap találkozik):
Az első csúcsból kiinduló öt lap rögzítése után egyértelműen folytatható a test konstruálása. A poliédernek 20 lapja van, ezért a neve ikozaéder. (‘Ikozi’: a. m. ‘húsz’.)

512/c.



513.



513. A szabályos ötszög egy belső szöge $\dfrac{3\cdot180°}{5}=108°$.
Három lap találkozhat egy csúcsban, de négy már nem.
Az első csúcsból kiinduló három lap rögzítése után ezúttal is egyértelműen folytatható a test konstruálása. 12 darab ötszöglapból álló testet kapunk, neve dodekaéder. (‘Dodeka’: a. m. ‘tizenkettő’.)

514. Háromszögekből, négyzetekből és ötszögekből öt szabályos test szerkeszthető. Több nincs: a szabályos hatszög egy belső szöge 120°, ezért ha három hatszöglapot csatlakoztatunk egy közös csúcshoz, merev síkot kapunk; ha pedig hatnál nagyobb oldalszámú szabályos sokszögeket tekintünk, ezek belső szögei 120°-nál nagyobbak, nem tudunk már hármat sem egy csúcshoz illeszteni.

515. *a)* Négyzet; *b)* tetraéder; *c)* oktaéder; *d)* dodekaéder; *e)* ikozaéder.

516. Minden eredeti kockaélhez tartozik egy csúcs, összesen 12; minden eredeti kockacsúcshoz tartozik három él, összesen 24; és minden eredeti kockacsúcshoz és kockalaphoz tartozik egy-egy lap, összesen 14.

517. Jelöljük l_5-tel, illetve l_6-tal az ötszög- és hatszöglapok számát! Mivel minden ötszöglapot 5 darab hatszöglap határol, s minden hatszöglaphoz három ötszöglap csatlakozik, $l_6=\dfrac{12\cdot5}{3}=20$. Az élek száma $\dfrac{5l_5+6l_6}{2}=90$, a csúcsok száma $\dfrac{5l_5+6l_6}{3}=60$.

518.

	kocka	tetra-éder	okta-éder	ikoza-éder	dodeka-éder	csonkolt kocka	futball-labda-poliéder
csúcs	8	4	6	12	20	12	60
lap	6	4	8	20	12	14	32
él	12	6	12	30	30	24	90

A táblázat alapján konvex poliéderekre a „csúcsok száma + lapok száma = élek száma + 2” összefüggést sejthetjük meg.

519. Gráfok esetén lapok helyett általában tartományokról beszélünk.
A poliéderekből úgy képezhetünk gráfokat, hogy az egyik lapjukra levetítjük a többi csúcsot, a közöttük futó élekkel együtt. A poliédergráfok képzéséből következik, hogy a poliéderhez képest a csúcsok és élek száma nem változik, a lapok száma eggyel csökken. Ezért egyik lehetőség, hogy síkban „csúcsok száma + tartományok száma = élek száma + 1” alakban mondjuk ki a sejtést. Azonban a „csúcsok száma + tartományok száma = élek száma + 2” alakot is megtarthatjuk. Ezt vagy úgy tehetjük meg, hogy a +1 tartománynak a poliéder azon lapját vesszük, amelyre a többi csúcsot vetítettük (az ábráinkon az a sokszög – „konvex burok” –, amely tartalmazza a többi pontot); vagy a +1 tartománynak a végtelen síktartományt tekintjük (az ábrákon a konvex burkon kívül eső rész).
Ezekkel a megfontolásokkal a „csúcsok száma + tartományok száma = élek száma + 2” sejtést síkba rajzolható gráfokra is kimondhatjuk.

520. Minden összefüggő gráf felépíthető élről élre haladva. Induljunk ki az egyetlen pontból álló gráfból! Erre Euler tétele teljesül: egy csúcs, egy tartomány (a végtelen sík, kivéve a csúcsot), nincs él.
Ezután sorra felvesszük az új éleket. Mindegyik lépésben az új él vagy régi csúcsot újjal köt össze (ekkor a csúcsok és élek száma egyaránt 1-gyel nő), vagy két már meglévő csúcsot köt össze (ekkor a tartományok és élek száma nő 1-gyel). Mindkét esetben továbbra is érvényben marad a tétel.
A fentiekből már következik, hogy minden konvex poliéderre is érvényes Euler tétele, sőt a bizonyításból az is látható, hogy többszörös élek és hurokélek esetén is alkalmazható a tétel.

521. Jelöljük a focilabda-poliéder ötszöglapjainak számát x-szel, és határozzuk meg a hatszöglapok számát az ötszöglapok segítségével!
Egy ötszöglaphoz 5 hatszöglap tartozik; x ötszöglaphoz $5x$ hatszöglap tartozik. Minden hatszöglapot háromszor számoltunk, mert egy hatszöglaphoz 3 ötszöglap illeszkedik. Ezért a hatszöglapok száma $\frac{5x}{3}$, a lapok száma $x+\frac{5x}{3}$.
A kétfajta laphoz $5x+6\cdot\frac{5x}{3}=15x$ csúcs tartozik. Minden csúcsot 3-szor számoltunk, mert minden csúcsban három lap találkozik, így a csúcsok száma $\frac{15x}{3}=5x$.
Az élek száma hasonlóan határozható meg. $5x+6\cdot\frac{5x}{3}=15x$ az összes (többszörösen számolt) él; mindegyiket 2-szer számoltuk, így az élek száma $\frac{15x}{2}$.
Ezután felírhatjuk Euler tételét: $5x+x+\frac{5x}{3}=\frac{15x}{2}+2$. Innen $x=12$, tehát a focilabda-poliéderben $x=12$ darab ötszöglap és $\frac{5x}{3}=20$ darab hatszöglap van, a csúcsok száma $5x=60$, az élek száma $\frac{15x}{2}=90$.

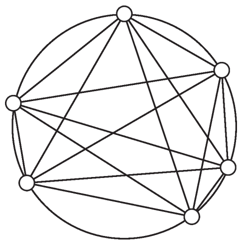
II

522. Jelöljük az ötszöglapok számát x-szel! A négyzetlapok száma ekkor $\frac{5x}{2}$ (egy ötszöglaphoz öt négyzet tartozik, és minden négyzetlapot kétszer számoltunk); a háromszöglapok száma hasonlóan $\frac{5x}{3}$; tehát a lapok száma $x+\frac{5x}{2}+\frac{5x}{3}=\frac{31x}{6}$.
Minden csúcs pontosan egy ötszöghöz tartozik, tehát a csúcsok száma $5x$.
Minden él pontosan egy négyzethez tartozik, az élek száma $4\cdot\frac{5x}{2}=10x$.
Euler tételéből $5x+\frac{31x}{6}=10x+2$, innen $x=12$. Tehát az L_{62}-poliéder jellemzői: $x=12$ darab ötszöglap, $\frac{5x}{2}=30$ négyzetlap, $\frac{5x}{3}=20$ háromszöglap, $5x=60$ csúcs és $10x=120$ él.
523. Mindegyik esetben a lapok számát jelöljük x-szel.
1. A szabályos test minden csúcsában három háromszöglap találkozik.
Ekkor a csúcsok száma $\frac{3x}{3}=x$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $x+x=\frac{3x}{2}+2$, az egyenlet megoldása $x=4$. A csúcsok száma 4, az élek száma 6. A tetraédert kaptuk.
2. A szabályos test minden csúcsában négy háromszöglap találkozik.
Ekkor a csúcsok száma $\frac{3x}{4}$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $\frac{3x}{4}+x=\frac{3x}{2}+2$, az egyenlet megoldása $x=8$. A csúcsok száma 6, az élek száma 12. Az oktaédert kaptuk.
3. A szabályos test minden csúcsában öt háromszöglap találkozik.
Ekkor a csúcsok száma $\frac{3x}{5}$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $\frac{3x}{5}+x=\frac{3x}{2}+2$, az egyenlet megoldása $x=20$. A csúcsok száma 12, az élek száma 30. Az ikozaédert kaptuk.
4. A szabályos test minden csúcsában három négyzetlap találkozik.
Ekkor a csúcsok száma $\frac{4x}{3}$, az élek száma $\frac{4x}{2}=2x$. Euler tételéből $\frac{4x}{3}+x=2x+2$, az egyenlet megoldása $x=6$. A csúcsok száma 8, az élek száma 12. Ez a kocka.
5. A szabályos test minden csúcsában három ötszöglap találkozik.
Ekkor a csúcsok száma $\frac{5x}{3}$, az élek száma $\frac{5x}{2}$. Euler tételéből

$\frac{5x}{3} + x = \frac{5x}{2} + 2$, az egyenlet megoldása $x = 12$. A csúcsok száma 20, az élek száma 30. Ez a dodekaéder.
Az egy csúcsban találkozó lapok típusára és számára több lehetőség nincs.
Megjegyzés:
Csak azt mutattuk meg, hogy legfeljebb a fentiek lehetnek a szabályos testek; ezek létezését nem igazoltuk.

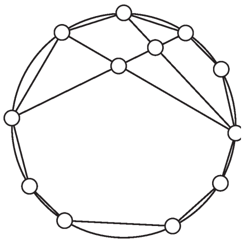
524. A legtöbb tartomány akkor keletkezik, ha a szakaszok közül semelyik három nem megy át egy ponton. Az 5. ponthoz tartozó szakaszok behúzása után 16 tartományt kapunk. Innen az a sejtésünk támadhat, hogy n pont esetén 2^{n-1} a tartományok száma ($n \in \mathbf{N}^+$), de az ábra mutatja, hogy a sejtés már $n = 6$ pontra sem teljesül: 31 tartomány keletkezik.

524.



525. A legtöbb tartomány akkor keletkezik, ha a szakaszok közül semelyik három nem megy át egy ponton. A 10 pont és az összes szakasz behúzása után egy síkgráfot kapunk, amelyben a szakaszok metszéspontjait is a gráf pontjainak tekintjük. (Az ábra egy részletet mutat.)

525.



A többszörös élekkel rendelkező gráfokra is felírható Euler tétele. Körön belüli pont csak két átló metszéspontjaként jöhet létre; két átlót négy körön lévő pont határoz meg, így a körön belüli metszéspontok száma $\binom{10}{4}$. A gráf csúcsainak száma tehát $10 + \binom{10}{4}$.
A kerületi pontokból 11, a belső pontokból 4 él indul ki, így az élek száma $\frac{10 \cdot 11 + 4 \cdot \binom{10}{4}}{2}$.
Jelöljük a tartományok számát x-szel, ekkor Euler tételéből (ha nem számoljuk a végtelen tartományt) $10 + \binom{10}{4} + x = \frac{10 \cdot 11 + 4 \cdot \binom{10}{4}}{2} + 1$. Az egyenletet rendezve $10 + x = \binom{10}{4} + \frac{10 \cdot 11}{2} + 1$, innen $x = \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + 1$.
Megjegyzés:
A keletkezett tartományok számát $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} + \binom{10}{0}$ alakban is írhatjuk, s ez a képlet mutatja, hogy más jellegű megoldás is adható. Általában is igaz az n pont esetén felírható $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0}$ formula.

Vegyes feladatok

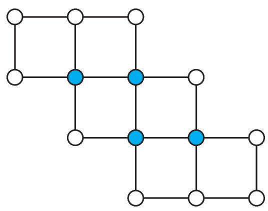
II

526. *Első megoldás:* Ilyen egyenesek a kocka élei (12 darab), lapátlói ($6 \cdot 2 = 12$ darab) és testátlói (4 darab), összesen 28 darab.
Második megoldás: A nyolc csúcsból bármely kettőt kiválaszthatjuk, a rajtuk áthaladó egyenes nem megy át további csúcson. $\binom{8}{2} = 28$.

527. *Első megoldás:* A piros csúcsot tartalmazó háromszögek száma $\binom{5}{2} = 10$ (az öt kék pontból kell kettőt kiválasztanunk a piros mellé); a három kék csúcsot tartalmazó háromszögek száma $\binom{5}{3} = 10$. A két fajta háromszögből ugyanannyi van.
Második megoldás: Minden piros csúcsot tartalmazó háromszöget kölcsönösen egyértelműen párosíthatunk a kimaradó három kék pontból álló háromszöggel.

528. Igen, van. A 447. feladatban láttuk, hogy összesen 11-féle különböző kockahálózat van, és mint gráf mindegyik 14 pontból áll. A kocka minden csúcsa három lapjához tartozik, így a hálózatban azoknak a kockacsúcsoknak lesz egyetlen pont a képük, amelyek három négyzethez csatlakoznak. A hálózatban egy négyzethez tartozó pontnak van egy két négyzethez tartozó párja, s a két hálózati pont együtt felel meg a kocka egy csúcsának.

528.



Pl. az ábrán négy kék kockacsúcsnak a négy jelölt hálózati pont a képe. Bármelyik további kockacsúcsot színezzük ötödikként kékre, a hálózatban két további kék pont lesz, összesen 6; míg ekkor a fehér pontok száma 8.

529. *Első megoldás:* Válasszuk ki a téglalapok bal felső és jobb alsó csúcsait! Ha a 7 függőleges és 11 vízszintes rácsvonalból álló négyzetrács felső sorának első rácspontja egyúttal a téglalap bal felső csúcsa, akkor a jobb alsó csúcsot $10 \cdot 6$-féleképpen választhatjuk hozzá. Ha a felső sorának második rácspontja a bal felső csúcs, akkor $9 \cdot 6$ lehetőségünk van; a harmadik rácspontnál $8 \cdot 6$ stb.; végül a tizediknél $1 \cdot 6$. Összesen $10 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + \ldots + 1 \cdot 6$ olyan rácstéglalap van, melynek felső csúcsai az első soron vannak.
A második sorban folytatva $10 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + \ldots + 1 \cdot 5$, a harmadikban $10 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + \ldots + 1 \cdot 4$, … , a hatodikban $10 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1$ téglalap keletkezik. Összesen $(10 + 9 + 8 + \ldots + 1)(6 + 5 + 4 + \ldots + 1) =$
$= \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 1155$ téglalapot határoznak meg a rácsvonalak.
Második megoldás: A téglalapokat átlóik alapján is azonosíthatjuk. Az átló egyik végpontját 77-, a másikat már csak 60-féleképpen választhatjuk ki, mert

az átló nem lehet sem vízszintes, sem függőleges. Az átló két végpontja kiválasztásának sorrendje felcserélhető, így összesen $\frac{77 \cdot 60}{2}$ átló választható ki. Így minden téglalapot a két átlójával kétszer számoltunk, ezért a téglalapok száma ennek a fele.

Harmadik megoldás: A téglalapok két függőleges és két vízszintes oldalegyenesét $\binom{11}{2} \cdot \binom{7}{2}$-féleképpen választhatjuk ki.

Negyedik megoldás: Természetes gondolat a téglalapok összeszámlálása területük alapján: vannak 1×1-es, 1×2-es, 2×1-es, 1×3-as, …, 6×10-es téglalapok. Ez a módszer eléggé munkaigényes.

530. Igaz. $\frac{5 \cdot 3}{2}$ nem egész szám, ezért a társaságnak megfeleltethető gráfban van negyedfokú pont.

531. Nem lehet hét személynek hét ismerőse és egynek hat, mert az ismeretségek száma $\frac{7 \cdot 7 + 6}{2}$ nem lenne egész szám. Legfeljebb 27 ismeretség lehetséges, csak ketten nem ismerik egymást.

532. Jelöljük a személyeket a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2-vel! (A házaspárokat azonos betűvel jelöltük.)

A kérdező (legyen pl. a_1) a 0, 1, 2, 3, 4 válaszokat kapta. Mivel összesen $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ kézfogás történt, s minden kézfogást csak egyszer számolunk, így a kérdező 2-szer fogott kezet. Érkezhetett harmadiknak, pl. b_1, c_1, a_1, a_2, b_2, c_2 érkezési sorrend esetén; s érkezhetett negyediknek, ha az érkezési sorrend pl. b_1, c_1, a_2, a_1, b_2, c_2 volt.

533. A nők egymással $\frac{n(n-1)}{2}$, a férfiak egymással $\frac{2n(2n-1)}{2}$ játszmát játszottak, míg „vegyes” parti $n \cdot 2n$ történt. Tegyük fel, hogy a „vegyes” mérkőzések közül x számút nyertek meg a nők, s $2n^2 - x$ számút férfiak. Ekkor a nők által megnyert játszmák száma $\frac{n(n-1)}{2} + x$, a férfiak által megnyert játszmák száma $\frac{2n(2n-1)}{2} + 2n^2 - x$, s innen $5\left(\frac{n(n-1)}{2} + x\right) = 7\left(\frac{2n(2n-1)}{2} + 2n^2 - x\right)$. Az egyenletet átalakítva $8x = 17n^2 - 3n$, s mivel $x \le 2n^2$, így $17n^2 - 3n \le 16n^2$. Az $n \le 3$ egyenlőtlenséget a feladat feltételeinek megfelelően csak $n = 3$ elégíti ki, s ekkor $x = 18$. Ekkor tehát 3 nő és 6 férfi vett részt a sakkversenyen, a 3 női és 15 férfi mérkőzésen kívüli 18 játszma mindegyikét a nők nyerték.

534. Válasszunk ki egy csapatot, pl. A-t, s tekintsük azt a 9 csapatot, amelyek A-val még nem játszottak! Ha közülük van kettő, pl. B és C, akik nem játszottak még egymással, készen vagyunk: A, B, C megfelelő csapatok. Ha viszont bármely két csapat már játszott volna egymással, az csak úgy lenne lehetséges, ha minden fordulóban kölcsönösen egymással mérkőztek volna. Mivel páratlan sokan vannak, így minden fordulóban valamelyik csapat ellenfél nélkül marad, vagyis ez az eset nem fordulhat elő; az állítás igaz.

535. Ha a pontok száma $n = 2k$, akkor k pontot pirosra és k pontot kék színűre kell színezni. Ekkor k^2 pont keletkezett; míg $k - x$ piros és $k + x$ kék pont esetén ($x \in \mathbf{N}^+$) a keletkezett szakaszok száma $k^2 - x^2$.
Ha a pontok száma $n = 2k + 1$ páratlan, akkor pl. k piros és $k + 1$ kék pont esetén $k^2 + k$ a keletkezett szakaszok maximális száma.

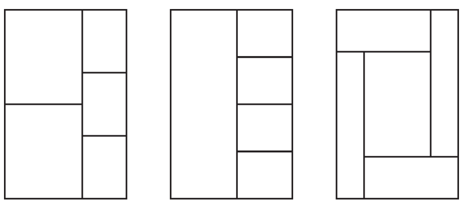
536. Egyforma méretű érmék esetén egy érme legfeljebb 6 másikat érinthet, ez n érme esetén $6n$ érintkezési pontot jelent. Mindegyik pontot kétszer számoltuk (a két érintkező érme mindegyikénél), így az érintkezési pontok száma legfeljebb $3n$; s mivel az asztal szélén lévő érmék 6-nál kevesebbel érintkeznek, az érintkezési pontok száma valóban kevesebb, mint $3n$.

537. Bármely két adott pontra legfeljebb két egységsugarú kör illeszkedik, így legfeljebb $2 \cdot \binom{n}{2}$ kört kapunk. Az egy körön lévő három pont három húrt határoz meg, így minden kört háromszor számoltunk. Legfeljebb tehát $\frac{2 \cdot \binom{n}{2}}{3} = \frac{n(n-1)}{3}$ az egységsugarú körök száma.

538. A piros pontokból kiinduló szakaszok száma $625 \cdot 4 + (4$ vagy 5 vagy $6)$, ezek mind pirosak vagy feketék. Ha x a piros szakaszok száma, akkor $625 \cdot 4 + (4$ vagy 5 vagy $6) = 2x + 101$, innen a piros szakaszok száma csak $x = 1202$ lehet.

539. Tegyük fel, hogy a végtelen sok pont között csak véges sok különböző távolság lép fel! Legyenek ezek $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, s az egyik pont (pl. A) köré rajzoljuk meg a $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ sugarú köröket! Az adott pontok mindegyike ezeken a körökön helyezkedik el, s legalább az egyik körön közülük végtelen sok van. Ellentmondást kaptunk, mert a végtelen sok, azonos körön lévő pont között végtelen sok távolság lép fel.

540.

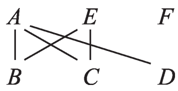


540. Tegyük fel, hogy a lakásban n ajtó van. Ha bármely két helyiség között van ajtó és minden helyiségből nyílik ajtó a lakáson kívülre, akkor összesen n darab külső és $\frac{n(n-1)}{2}$ belső ajtó van (e képletet úgy kaptuk, hogy mindegyik helyiség $n - 1$ másikkal érintkezik, de ekkor minden ajtót

kétszer számoltunk). Innen $n+\dfrac{n(n-1)}{2}\geq 12$, $n^2+n-24\geq 0$, $n\geq 5$, tehát legalább 5 helyiségnek lennie kell.
Ennyi elég is; az ábrán egy-egy lehetséges megoldás látható.

541. Jelöljük a társaság tagjait A, B, C, D, E, F-fel, s legyen A három ismerőse B, C, D. Ekkor E-nek és F-nek legalább két ismerőse van B, C és D között; legyenek E ismerősei pl. B és C (ábra).

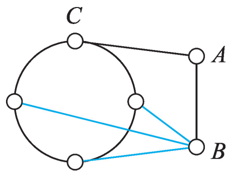
541.



Ha F ismeri D-t, a jegyek A–B, E–C, F–D szétosztása megfelelő; ha F nem ismeri D-t, akkor pl. az A–D, E–C, F–B szétosztás jó.

542. A társaság tagjait pontokkal, az ismeretségeket élekkel reprezentálva azt fogjuk megmutatni, hogy az így kapott gráfban van 6 hosszú (Hamilton-) kör. A 477. feladat megoldása alapján tudjuk, hogy a gráfban van legalább 4 hosszú K kör.
Ha K 5 hosszú, akkor a kimaradt A ponttal 6 hosszúra bővíthetjük (A harmadfokú, tehát K két szomszédos pontjával biztosan össze van kötve).

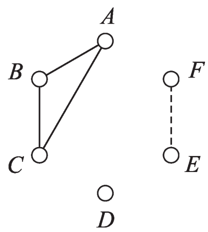
542.



Ha K hossza 4, akkor a kimaradó A és B pontok össze vannak kötve egymással (egyébként lenne 5 hosszú kör); jelöljük továbbá C-vel K egy olyan pontját, amely A-val szomszédos.
Az ábráról leolvasható, hogy K bármely C-n kívüli pontját összekötve B-vel, legalább 5 hosszú kört kapunk, s az előző megállapításaink értelmében ekkor 6 hosszú kör is lesz.

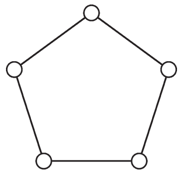
543. *a)* Tetszőleges A csúcsból kiinduló 5 él között a skatulyaelv miatt van 3 ugyanolyan színű. Legyenek pl. ezen piros élek végpontjai az A_1, A_2, A_3 csúcsok. Ha most az $A_1A_2A_3$ háromszögben A_iA_j él is piros, akkor az AA_iA_j háromszög megfelelő; ha viszont az $A_1A_2A_3$ háromszögben egyik él sem piros (legyenek pl. kékek), akkor $A_1A_2A_3$ kék háromszög.

543/I.



b) Található még további egyszínű háromszög.
Tekintsük az I. ábrát.
Mivel az *a)* feladat alapján van egyszínű háromszög, az ABC háromszög éleit választhatjuk pirosnak. Feltehetjük, hogy a DEF háromszögben van kék él, ez legyen pl. EF. Most vizsgáljuk meg az EA, EB, EC éleket! Ha ezek között található két piros, akkor újabb piros háromszöget kapunk, tehát feltehetjük, hogy E-ből két kék él indul ki az A, B, C pontokba; s ugyanezt elmondhatjuk F-ről is. Ekkor azonban a skatulyaelv miatt lesz olyan pont A, B és C között, amelyet E-vel és F-fel is kék éllel kötöttünk össze, s ezért kék háromszöget kaptunk.

543/II.

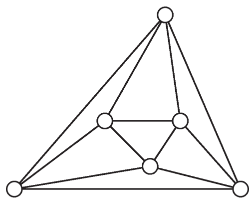


c) Igaz. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ teljes gráfban A-ból négy piros él indul ki. Ha ekkor $BCDE$-ben van két piros él, készen vagyunk, mert két piros háromszöget is kaptunk; ha pedig legfeljebb egy piros él van, akkor belátható, hogy két kék háromszög keletkezik.

d) Nem. Ellenpélda az a gráf, amelyik két különböző színű, 5 hosszú körből áll (a II. ábrán csak az egyik színű éleket jelöltük).

544. Tetszőleges A csúcsból kiinduló 16 él között a skatulyaelv miatt van 6 egyforma színű. Legyenek pl. ezen piros élek végpontjai az $A_1, A_2, \ldots, A_6$ csúcsok. Ha most az $A_1A_2\ldots A_6$ teljes gráfban valamelyik A_iA_j él is piros, akkor az AA_iA_j háromszög megfelelő; ha viszont az $A_1A_2\ldots A_6$ teljes gráf élei a maradék két színnel vannak kiszínezve, akkor az előző feladat miatt lesz egyszínű háromszög a gráfban.

545.



545. A megoldás folyamán feltettük, hogy a pontokat sorban, egymás után vesszük fel. Azonban lehet olyan ábrát rajzolni, amely esetében a fenti gondolatmenet nem alkalmazható (ábra).
Ezen az ábrán a felvett belső pontok között nincs „első" és „következő".
Megjegyzés:
Érdekes viszont, hogy az utolsó ábrát akárhogyan egészítjük ki további három ponttal, a részháromszögek száma mindig 13 lesz.

546. Tegyük fel, hogy a 6 pont felvétele és a szakaszok berajzolása után h darab háromszöget kaptunk. A háromszögek belső szögeinek összege $h \cdot 180°$. Ez az összeg a 6 pont körüli 360°-os teljes szögekből és az alapháromszög belső szögeiből tevődik össze, tehát $6 \cdot 360° + 180° = h \cdot 180°$. Innen $h = 13$.

547. *a)* Az állítás igaz. A $H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}\}$ halmaz A_1, A_2, A_3, A_4 részhalmazait pl. az alábbi táblázattal adhatjuk meg:

	a_1	a_2	a_3	…	a_4
A_1	1	1	0		0
A_2	1	0	0		0
A_3	0	1	0		1
A_4	0	1	0		0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes részhalmazoknál 1-est írunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl. $a_1 \in A_1$, de $a_1 \notin A_3$.
A feladat feltétele alapján a táblázatban 40 darab 1-es szerepel, s meg kell mutatnunk, hogy van olyan oszlop, amelyben 4 darab 1-es van. Ez pedig a skatulyaelv miatt nyilvánvaló: ha minden oszlopban csak 3 darab 1-es lenne, összesen $13 \cdot 3 = 39$ darab 1-es lenne táblázatban.

b) Az állítás igaz. Vizsgáljuk meg az előző bizonyítást, ha $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}$ az egyes személyeket, A_1, A_2, A_3 és A_4 pedig a közülük tetszőlegesen kiválasztott négy személyt jelenti. (Ekkor pl. az A_i ismeri a_j reláció a táblázatban úgy ismerhető fel, hogy A_i sorában és a_j oszlopában 1-es szerepel. A táblázat egy gráfmodellt is megad; ebben az A_i és a_j közötti él létezését jelöljük 1-essel.)

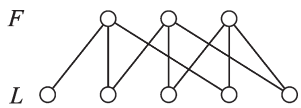
548. Tegyük fel, hogy az egyik osztályból m, a másikból n tanuló vett részt a versenyen ($m,\ n \in \mathbf{N},\ 2 < n \leq m \leq 24$)! Ekkor $\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{m(m-1)}{2} = mn$, innen $2mn = m^2 - m + n^2 - n$. Az egyenletet átalakítva $m + n = (m - n)^2$, innen a következő lehetőségeket kaptuk:

$m+n$	$m-n$	m	n
9	3	6	3
16	4	10	6
25	5	15	10
36	6	21	15

Összesen négy megoldás van.

549. Valamelyik fajta táncból legalább három fiú legalább háromszor táncolt. Tekintsük azt a 8 pontú gráfot, mely pontjainak a 3 fiú, illetve 5 lány felel meg, s amelyben akkor kötünk össze két pontot egymással, ha a résztvevők ezt a bizonyos táncot táncolták (ábra)!

549.

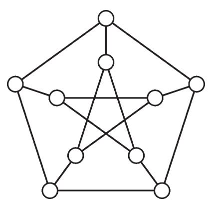


Jelöljük F-fel a fiúk, L-lel a lányok pontjainak halmazát! A feladat annak bizonyítása, hogy kiválasztható 2-2 pont F-ből és K-ból úgy, hogy ennek a részgráfnak 4 éle legyen.
F-ből összesen 9 él indul ki, ennyi L-ben is a fokszámok összege. Ha L-ben van harmadfokú pont, akkor van még egy legalább másodfokú pont is, s ezen két lány és két fiú kiválasztása megfelelő lesz. Ha viszont L-ben a fokszámok 1, 2, 2, 2, 2 (ábra), akkor a következőképpen járhatunk el: elhagyjuk L-ből az elsőfokú pontot és a hozzá tartozó élt; elhagyjuk F-ből a másodfokú pontot, marad két harmadfokú pont; s ezekhez kiválasztjuk az L-ben maradt két másodfokú pontot.

550. Abból, hogy egy rendszer nem bővíthető, nem következik, hogy a rendszer maximális. Hiába nem tudjuk az $n = 8$ esetet $n = 9$-re továbbfejleszteni, elképzelhető, hogy egészen más eljárással találunk $n = 9$-re konstrukciót. Abból pedig, hogy $n = 9$-re nem készíthető megfelelő gráf, nem következik, hogy nagyobb n-ekre sincs megoldás.

551. Valóban nem készíthető a feladat feltételei szerint 9 pontú gráf, de könnyen ellenőrizhető, hogy az ábra szerinti $n = 10$ pontú gráf megfelelő.

551.



Tehát hiába nincs $n = 9$-re konstrukció, $n = 10$-re sikerült találni egyet, ezért 10 város között még járhatnak gépek.

10-nél több város esetén a közlekedtetés nem lehetséges. Ugyanis átszállás nélkül egy városból legfeljebb három másikba, azok mindegyikéből egy további átszállással legfeljebb két-két újabb városba juthatunk el. Vagyis legfeljebb $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$ város között járhatnak a gépek, s ezt fentebb el is értük.

552. *a)* A bizonyítás az 543. feladat *a)* része alapján történhet.
b) Nem, az indoklás az 543. feladat *d)* megoldásához hasonló.

553. Alkalmazzuk az 544. feladat gondolatmenetét!

554. A feladat a gráfok nyelvére átfogalmazható: meg kell mutatnunk, hogy ha egy 66 pontú teljes gráf éleit négy színnel kiszínezzük, akkor található olyan háromszög a gráfban, amelynek az oldalai azonos színűek.

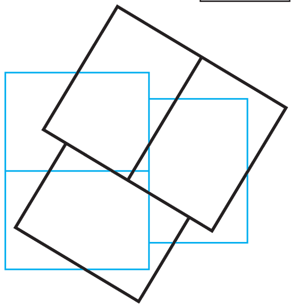
A gráf tetszőleges A csúcsából kiinduló 65 éle között a skatulyaelv miatt van 17 egyforma színű. Legyenek pl. ezen piros élek végpontjai az $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ csúcsok. Ha most az $A_1A_2\ldots A_{17}$ teljes gráfban valamelyik A_iA_j él is piros, akkor az AA_iA_j háromszög megfelelő; ha viszont az $A_1A_2\ldots A_{17}$ teljes gráf élei a maradék három színnel vannak kiszínezve, akkor az előző (vagy az 544.) feladat alapján készen vagyunk, van egyszínű háromszög a gráfban.

555. *a)* Képzeljük el, hogy a lehetséges nyitó kombinációk (000, 001, 010, 011, …, 111) egy térbeli koordináta-rendszerbe helyezett kocka 8 csúcsának koordinátái, s tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai a kocka csúcsai, élei a kocka élei! Kezdetben 101 a beállított kombináció, ezzel próbálkozunk; ezután valamelyik koordinátát megváltoztathatjuk. Észrevehetjük, hogy egyetlen koordináta megváltoztatása azt eredményezi, hogy az adott csúccsal szomszédos kockacsúcsnak megfelelő kombinációt próbáljuk ki. Vagyis a feladat átfogalmazható: a kocka csúcsait kell a lehető legkevesebb lépésben bejárni, ha adott pontjából indulunk és az élek mentén haladunk. (Kicsit elegánsabb, ha a kezdőhelyzetet eleve a 000 állapotnak tekintjük, s ekkor a bejárás az origóból indul.) A kocka élvázának van Hamilton-útja, tehát legfeljebb 8 próbálkozásból kinyithatjuk a zárat.

b) A kérdés az, hogy a kocka élvázának mint gráfnak adott pontból indulva hány Hamilton-útja van? Egyszerűség kedvéért induljunk a (0; 0; 0) pontból! Az első lépés 3-féle lehet, a második 2-féle. A két él a kocka egyik lapján van, szimmetriaokok miatt feltehetjük, hogy az eddigi út 000 – 010 – 011. (Itt a koordinátákat egyszerűbben a kódokkal jelöltük.) Innen két irányban folytathatjuk a bejárást. Ha a 010 csúcsba lépünk, a 010 lépés után kétféleképpen járhatjuk be a csúcsokat; ha pedig az 111 csúcsba, onnan csak az 101 – 001 – 011 – 010 bejárás lehetséges. Összesen $12 + 6 = 18$ Hamilton-út van, tehát ennyiféleképpen nyithatjuk ki a páncélszekrényt.

556. Optimális helyzetben bármely két kabin érintkezik és minden kabinból nyílik zsilip a külső űrbe. Ez n kabin esetén n darab külső és $\frac{n(n-1)}{2}$ belső zsilipet jelent (ez utóbbi képletet úgy kaptuk, hogy mindegyik kabin $n - 1$

556.



számú másikkal érintkezik, de ekkor minden zsilipet kétszer számoltunk). Innen $n+\frac{n(n-1)}{2}\geq 21$, $n^2+n-42\geq 0$, $n\geq 6$ vagy $n\leq -7$.
Mivel $n\leq -7$ értelmetlen, legalább 6 kabinnak lennie kell.
Ennyi elég is. Az ábra mutatja, hogy 6 egybevágó téglatestet összeépíthetünk úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös felülete.

557. Egy irracionális és egy racionális szám összege mindig irracionális; két irracionális szám összege lehet racionális és lehet irracionális is.
A feladatot átfogalmazhatjuk a gráfok nyelvére. Jelöljük a hat számot pontokkal; két szám összeadását a nekik megfelelő pontok között lévő él megrajzolásával; s az élt színezzük pirosra, ha a két szám összege irracionális, illetve kékre, ha a két szám összege racionális!

a) Ekkor a gráfelméleti kérdés az, hogy ha a 6 pontú teljes gráf éleit a feltételeknek megfelelően kiszínezzük két színnel, akkor keletkezik-e piros háromszög?
Vizsgáljuk meg, hogy keletkezhet-e a gráfban kék háromszög! Ez azt jelentené, hogy van három irracionális szám, pl. a, b és c, melyek közül bármely kettő összege racionális. Ekkor az $(a+b)+(a+c)+(b+c)=$ $=2(a+b+c)$ összeg, s így $(a+b+c)$ is racionális lenne. Ez lehetetlen: $(a+b+c)-(a+b)=c$ racionális lenne, s ez ellentmondás. Az 543. *a)* feladat megoldása alapján tudjuk, hogy a gráfban keletkezik egyszínű háromszög; az előbbiek alapján ez kék nem lehet, csak piros. Tehát az állítás igaz.

b) Az 543. *d)* feladat alapján akkor nincs egyszínű háromszög az 5 pontú teljes gráfban, ha a piros és kék élek egy-egy 5 hosszú kört alkotnak. Ebből következne, hogy léteznek olyan a, b, c, d, e irracionális számok, melyek páronkénti ciklikus összege: $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+e)$, $(e+f)$ egyaránt racionális szám. Ekkor ezek $2(a+b+c+d+e)$ összege, s innen $(a+b+c+d+e)$ is racionális lenne. Ez nem lehetséges: $(a+b+c+d+e)-(a+b)-(c+d)=e$ racionális lenne, s ez ellentmondás. Vagyis az 5 pontú gráfban van egyszínű háromszög, s mivel ez kék nem lehet, így piros. Az állítás igaz 5 irracionális számra is.

558. A 990 piros pontból 4 van a sarokban, 82 a szélen és 904 belül. A piros pontokból kiinduló vonalak száma $4\cdot 2+82\cdot 3+904\cdot 4=3870$. A piros vonalakat kétszer, a feketéket egyszer számoltuk, így $3870-947\cdot 2=1976$ a fekete vonalak száma. A rácsban összesen 4900 vonal van, ebből a kékek száma $4900-947-1976=1977$.

559. Az adott egyeneseket 3^{2n}-féleképpen színezhetjük, a pontok színezése a függőleges és vízszintes egyenesek egymás közötti színezési sorrendjétől független. Ugyanakkor ha adott az n^2 pont egy színezése, egy egyenes színét tetszőlegesen választhatjuk (3-féleképpen), a többi adódik.

Eredmény: $\frac{3^{2n}}{3}=3^{2n-1}$.

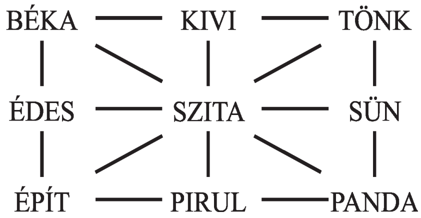
560. Legyen p darab piros és k darab kék csúcs ($p + k = 6n + 1$), s számoljuk meg a „tarka” egyenlő szárú háromszögek számát! Egy „tarka” élhez mint alaphoz egy, mint szárhoz két egyenlő szárú háromszög illeszthető, s minden „tarka” egyenlő szárú háromszöget kétszer számoltunk. A „tarka” egyenlő szárú háromszögek száma tehát $\frac{3pk}{2}$, vagyis állandó.

561. A négydimenziós egységkocka $(x; y; z; t)$ koordinátájú pontjaira
$0 \le x,\ y,\ z,\ t \le 1$.
A csúcsainak száma $2^4 = 16$, mert a csúcsok bármely $(x; y; z; t)$ koordinátája kétféle értéket vehet fel, 0-t vagy 1-et.
Egy élt két végpontjával adhatunk meg, pl. $(0; 0; 0; 0)$ és $(0; 0; 0; 1)$. Három koordináta kétféle értéket vehet fel, a negyediket $\binom{4}{1}$-féleképpen választhatjuk ki, tehát a négydimenziós kocka éleinek száma $\binom{4}{1} \cdot 2^3 = 32$.
Hasonlóan okoskodva a kétdimenziós lapoknál két fix koordinátát választunk ki, melyek mindegyike kétféle értéket vehet fel. Innen a lapok száma $\binom{4}{2} \cdot 2^2 = 24$.
A háromdimenziós lapokat az jellemzi, hogy egyik koordinátájuk kétféle értéket vehet fel, a másik három értéke pedig 0 és 1 közötti bármilyen szám lehet. Innen a háromdimenziós lapok száma $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$.

Kétszemélyes játékok

562. A könnyebb áttekinthetőség érdekében alkalmazzunk gráfmodellt! Legyenek a gráf csúcsai a szavak, s akkor kötünk össze két csúcsot éllel, ha a nekik megfelelő szavakban található közös betű. A gráf csúcsainak megfelelő szavakat 3×3-as táblázat alakban is elrendezhetjük (ábra).

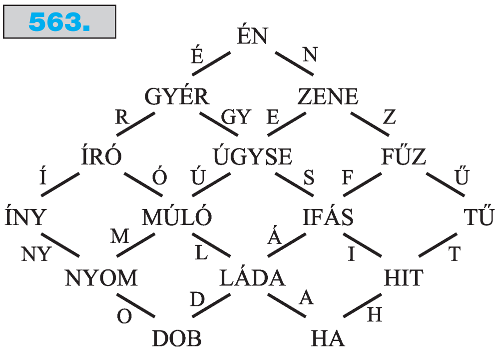
562.



Az átfogalmazás után a klasszikus 3×3-as amőba játékra ismerhetünk. Ebben két játékos felváltva rajzolja be a saját jelét (általában X-et vagy O-t) egy 3×3-as táblázat üres mezőibe, s az a játékos nyer, aki három saját jelet tud berajzolni egymás mellé vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban.
Helyes játék esetén egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája, a játék elméleti döntetlen.

563. A második játékos tud nyerni.
Alkalmazzunk gráfmodellt, melyben a gráf csúcsai a szavak, s akkor kötünk össze két csúcsot éllel, ha a csúcsoknak megfelelő szavakban található közös betű (ábra).
A második játékos az első játékos kezdőszavától kettő távolságra választja meg a saját kezdőszavát (vagyis úgy, hogy a gráfban a két szónak megfelelő pont között kettő hosszú út legyen). Ekkor az első játékos a következő szavával a gráfban csak „távolodni” tud, s előbb-utóbb beszorul. Példa egy lehetséges játékra: ÚGYSE–LÁDA (a kezdőszavak)–GYÉR–MÚLÓ–ÉN–ÚGYSE, s ezután bármelyik szót választja a soron következő, eredetileg kezdő játékos, a második is választhatja azt (GYÉR, illetve ZENE).

563.

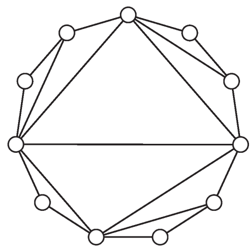


564. A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.
Kezdésként behúzza a 10-szög egy tükörtengely-átlóját. Ezután bármit húz ellenfele, annak tükrös szakaszpárját húzza be. Előbb-utóbb elfogynak a behúzható szakaszok, a másodhúzó nem fog tudni „lépni”.

Megjegyzés:
Tetszőleges szabályos $2n$-szög esetén is alkalmazható a stratégia.

565. A szimmetriagondolat most nem alkalmazható, de néhány próbajáték után megsejthetjük, hogy mindig a kezdő játékos nyer.
Tekintsük a játék egy végállapotát!
A végső helyzetben háromszögeket kapunk, hiszen nem folytathatjuk a szakaszok behúzását. Jelöljük a keletkezett háromszögek számát h-val! Ezek belső szögeinek összege $h \cdot 180°$, innen $h \cdot 180° = 9 \cdot 180°$ (a 11-szög belső szögeinek összege), vagyis a játék végén mindig 9 darab háromszög keletkezik. A 9 háromszög létrehozásához 8 átlót kell behúzni, a 11 oldallal együtt összesen 19 szakaszt húz be a két játékos. Ez azt jelenti, hogy mindig a kezdő nyer, nincs szüksége „stratégiára”.

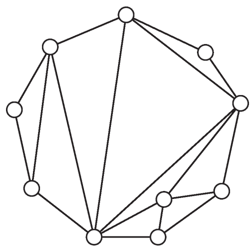
565.



Megjegyzés:
Ez az invarianciagondolat tetszőleges n-szög esetén alkalmazható.

566. Arra kell törekedni, hogy az összes behúzható szakasz száma páros legyen.
Tekintsünk egy szabályos 9-szöget, s belsejében egy további pontot (semelyik három pont ne legyen egy egyenesen)!
Ha az összekötő szakaszok behúzása után h darab háromszög keletkezik, akkor $h \cdot 180° = 7 \cdot 180° + 360°$, mert a belső pont körül 360° a szögösszeg.

566.



Innen $h = 9$. A külső végtelen síkrészt is számolva a tartományok száma 10, a csúcsok száma 10. Euler tétele miatt összesen 18 él keletkezik, így most már a második játékosnak van „nyerő stratégiája”. (Ez a „nyerő stratégia” persze ismét azt jelenti, hogy a második játékos bárhogyan játszhat, nem tud veszíteni.)

567. Jelöljük a kezdő játékost *A*-val, a másodhúzót *B*-vel, s vizsgáljuk meg először az egyszerűbb eseteket! Páros számú kezdeti pont esetén mindig *A* nyer, ha a szimmetrián alapuló stratégiát követi. (Kezdetben egy tükörtengely-átlót húz be, majd mindig ellenfele lépésének erre vett tükörképét válaszolja.)

Ha kezdetben 3 pont adott, akkor *A* nyer.

Ha kezdetben egy szabályos ötszög csúcsai adottak, akkor könnyen megmutatható, hogy *B* nyer.

Ha kezdetben egy szabályos hétszög csúcsai adottak, akkor kezdésként *A* ennek egyik oldalélét húzza be. Az így összekötött két pontot leválaszthatjuk, a maradék öt pontból álló gráf a játék szempontjából hasonlóan kezelhető, mint a szabályos ötszög öt csúcsa. Ebben a helyzetben az aktuális kezdő, vagyis *B* veszít, tehát *A* nyer.

Ha kezdetben egy szabályos kilencszög csúcsai adottak, akkor jelöljük a gráf pontjait 1, 2, 3, … , 9-cel, s vizsgáljuk meg *A* kezdési lehetőségeit!

Ha kezdésként *A* két szomszédos pontot köt össze, pl. 1-et és 2-t, akkor a megmaradt hét pont a játék szempontjából szabályos hétszögnek is tekinthető, ekkor tehát *B* tud nyerni.

Ha *A* kezdőlépése $\overline{13}$, akkor a 4, 5, 6, … , 9 pontok a játék szempontjából szabályos hatszögnek tekinthetők; *B* nyer.

Ha *A* kezdőlépése $\overline{14}$, akkor *B* válasza $\overline{23}$; a megmaradt ötszöggel folytatva a játékot ismét *B* nyer.

Ha *A* kezdőlépése $\overline{15}$, akkor a 2, 3, 4 pontokra összesen egy él illeszthető. Ha *B* lépése $\overline{69}$, akkor összesen 2 további él húzható be; *B* nyer.

Szabályos kilencszög esetén tehát *B* nyer; ebből következik, hogy szabályos 11-szög esetén *A* nyerhet, ha kezdésként egy oldalélt húz be.

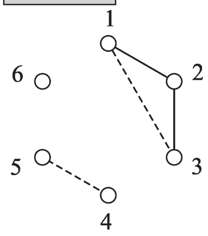
568. Első észrevétel, hogy a gráf összefüggőségéhez legalább 5 élt be kell húzni, ugyanis a játék kezdetén a gráf 6 komponensből áll, s egy él behúzása legfeljebb eggyel csökkenti a komponensek számát. Ha pontosan 5 élt behúzva a gráf összefüggő lesz, gráfelméleti fát kapunk. Ennek jellemzője, hogy nem tartalmaz gráfelméleti kört, vagyis nem vezet semelyik pontból önmagába élsorozat.

Ha 5 él felvétele esetén véget ér a játék, akkor a kezdő játékos nyer. Ezért a másodhúzónak arra kell törekednie, hogy a játék folyamán valamikor kört hozzon létre, mert ekkor van lehetősége további él behúzására.

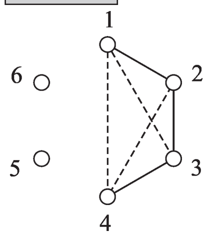
Sorszámozzuk a pontokat 1, 2, ... , 6-tal. A szimmetrikus helyzetek miatt feltehetjük, hogy a kezdő játékos mindig az $\overline{12}$ élt húzza be. A fentiek miatt a második játékos nem húzhat pl. $\overline{34}$-et, mert első $\overline{56}$ válasza után még pontosan

2 élt húznak be a játék folyamán. Tehát a második játékos válasza $\overline{12}$-re $\overline{23}$. Most ha a kezdő $\overline{54}$-et lép, erre a második $\overline{13}$-mal válaszol, s sikerült egy hatodik élt felvennie: két további éllel befejezhető a játék (I. ábra).
Ha a kezdő lépi $\overline{13}$-at, akkor az $\overline{54}$ húzás csak lépéscserét jelent, ezért a kezdőnek az $\overline{123}$ komponenst kell bővítenie, pl. $\overline{34}$-gyel (vagy bármilyen, vele szimmetrikus szerepű húzással). Az így kapott 3 komponensű gráfot a II. ábrán láthatjuk.

568/I.



568/II.



Most az a játékos veszít, aki az 5-ös vagy 6-os pontot kénytelen összekötni egymással vagy valamelyik kisebb sorszámú ponttal. Ekkor ugyanis a gráf komponenseinek száma 2 lesz, s a következő játékos ezt 1-re csökkentheti, vagyis összefüggővé teheti a gráfot.
Az 5-ös és 6-os pont elkerülésével 3 él húzható be, az ábrán szaggatottal jelöltük. Ez azt jelenti, hogy ezen 6 él behúzása után még kettőt húznak be a játékosok, vagyis mindkét játékos legjobb játékával összesen 8 él húzható be. A második játékos nyer.

569. A kezdő nyer.
Ha mindkét játékos jól játszik, akkor 5 él behúzása után a gráf összefüggő lesz. (Minden húzással eggyel csökken a komponensek száma, hiszen nem kapunk kört.) A 6. húzás már nem csökkentheti a komponensek számát: kialakul egy kör.

570. A feladat könnyű. Egy tükörtengely-átlót behúz a kezdő; mivel ezután szimmetrikus válaszlépéseket tehet, a kezdő nyer.

Megjegyzés:
Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben egy szabályos ötszög csúcsai adottak?