I. Kombinatorika

Bevezető feladatok

1. *a)* $3 \cdot 5 = 15$; *b)* $1 \cdot 2 = 2$.
2. $6 \cdot 6 = 36$.
3. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.
4. $4 \cdot 4 = 16$. A „felső ág” és az „alsó ág” 4-4 csapata közül bármelyik játszhatja a döntőt.
5. $20 \cdot 20 = 400$. Mindkét fél 16 gyalog- és 4 huszárlépés közül választhat.
6. $6 \cdot 10 = 60$. Az e egyenes bármely 6 pontját az f egyenes bármely 10 pontjával összeköthetjük.
7. *a)* A legtöbb játszmát 10-10 játékos esetén kapjuk, a mérkőzések száma ekkor $10 \cdot 10 = 100$.
b) Ha a játékosok száma $n = 2k$, a maximális számú mérkőzést akkor kapjuk, ha egyforma létszámú csoportokat hozunk létre. Ekkor k^2 számú játszma lesz, míg ha a csoportok létszáma $k + d$, illetve $k - d$ (ahol $d \in \mathbf{Z}^+$), a játszmák száma kevesebb lesz: $(k + d)(k - d) = k^2 - d^2$. Ha a játékosok száma $n = 2k + 1$, a legtöbb mérkőzést akkor kapjuk, ha k, illetve $k + 1$ a csoportok létszáma. Ekkor $k^2 + k$ számú játszma lesz, míg ha a csoportok létszáma $k + 1 + d$, illetve $k - d$ (ahol $d \in \mathbf{Z}^+$), a játszmák száma kevesebb lesz: $(k + 1 + d)(k - d) = k^2 + k - d^2 - d$.
8. *a)* Az $1 + 1 + 3$ és $1 + 2 + 2$ összegek egyaránt 3-féleképpen állhatnak elő, ez összesen 6 lehetőség.
b) A 3-as összeg 1-féleképpen $(1 + 1 + 1)$, a 4-es összeg 3-féleképpen $(1 + 1 + 2)$, az 5-ös összeg pedig az *a)* feladat alapján 6-féleképpen állhat elő. Összesen $1 + 3 + 6 = 10$ lehetőség.
9. Ha az utolsó (legkisebb) helyiértéken álló számjegy 5, akkor $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$-féle szám készíthető, mert 0-val nem kezdődhet a szám. Ha az utolsó helyiértéken álló számjegy 0, akkor $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féle szám lehetséges. Összesen $96 + 120 = 216$ lehetőség van.
10. *a)* *I. ábra:* Az A-ból C-be vezető utak száma $\overline{AC} = 3 \cdot 4 + 1 + 2 = 15$.
II. ábra: Induljunk el az A pontból, s minden elágazásnál írjuk a csomópontra az A-ból odavezető utak számát (10/2. ábra)!
Észrevehetjük, hogy az út során bármely X elágazáshoz vagy felülről, vagy balról érkezhetünk, ezért az X csomópontra írt szám megegyezik a tőle balra, illetve felette lévő csomópontra írt számok összegével. $\overline{AC} = 84$.

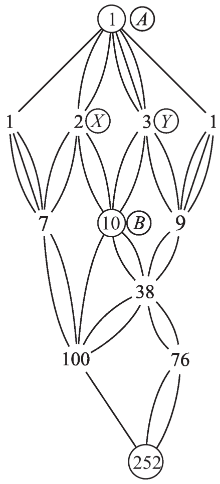
10/2.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 3 & - & 6 & - & 10 & - & 15 & - & 21 & - & 28 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 4 & - & 10 & - & 20 & - & 35 & - & 56 & - & 84
\end{array}$$

III. ábra: Hasonló okoskodással $\overline{AC} = 252$. Bármely elágazáshoz felülről érkezünk, de onnan több út is lehetséges. Pl. B-be X-ből vagy Y-ból 2 úton juthatunk el (10/3. ábra). X-be 2, Y-ba 3 út vezetett, ezért a B-be vezető utak száma $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$.

I

10/3.



b) *I. ábra:* $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{ABC} = 3 \cdot 4 = 12$.
II. ábra: $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{ABC} = 10 \cdot 4 = 40$.
III. ábra: $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 13$, $\overline{ABC} = 10 \cdot 13 = 130$.

c) Az összes út számából ki kell vonni a B-n áthaladó utak számát. *I. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 15 - 12 = 3$. *II. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 84 - 40 = 44$. *III. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 252 - 130 = 122$.

11. Összesen 9 darab egyjegyű, 90 darab kétjegyű, 900 darab háromjegyű és 1005 darab négyjegyű számot írtunk le. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1005 \cdot 4 = 6909$.

12. Kötetenként $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 464 \cdot 3$, $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 453 \cdot 3$, illetve $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 482 \cdot 3$, összesen $1581 + 1548 + 1635 = 4764$ számjegyet írtunk le.

13. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + n \cdot 3 = 2184$, innen $n = 665$. Ennyi oldalból áll a munka.

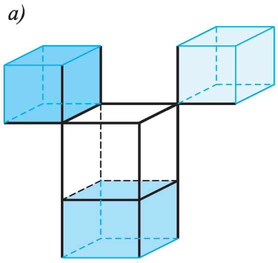
14. *a)* A szám $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 2893$ jegyű.
b) Az 1-es számjegyet 001-től 999-ig minden helyiértéken 100-szor írtuk le, összesen 300-szor. Hasonló a helyzet a 2, 3, … , 9 számjegyekkel.
A 0-t az egyes helyiértéken 99-szer, a tízes helyiértéken 90-szer, összesen 189-szer írtuk le. Maradt még az 1000, így összesen: az 1-es számjegyet 301-szer; a 2, 3, … , 9 számjegyeket 300-szor; a 0-t 192-szer írtuk le.
c) $9 \cdot 1 + 45 \cdot 2 = 99$, a 100. számjegy 5-ös.

15. A tükrös helyzetű színezett mezőket párosíthatjuk. Mivel páratlan számú színezett mező van, a középső mezőt kiszíneztük. Általánosan is igaz marad az állítás, ha a tábla két oldalhosszának mérete és a bábuk száma páratlan.

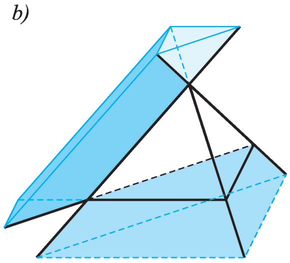
16. *a)* 10.
b) 10. Minden 2 elemű részhalmazhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük a 3 elemű komplementer részhalmazát.

19.

a)



b)



17. A kezdő játékos nyerhet. Kezdetben az érméjét az asztal középpontjára helyezi, majd minden lépésben az ellenfél érméjére középpontosan tükrösen helyezi el sajátját.

18. A kezdő játékos nyerhet. Kezdetben a két középső korongot fordítja meg, majd minden lépésben az ellenfél által megfordított korongokra szimmetrikus helyzetű korongokat fordítja meg.
Ha kezdetben a korongok egy körben helyezkednek el, akkor a kezdő játékos lépése után 9 vagy 8 hosszú sor marad. A második játékos 1 vagy 2 középső korong megfordításával előállíthatja a szimmetrikus helyzetet, tehát neki van nyerő stratégiája.

19. A testek minden lapjához, éléhez és csúcsához „kívülről” egy-egy térrészt rendelhetünk, s maga a test is egy térrészt határoz meg.
a) $6 + 12 + 8 + 1 = 27$; *b)* $4 + 6 + 4 + 1 = 15$.

20. Minden 4-lyukú buszjegyhez kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük az 5-lyukú „komplementer” buszjegyet, tehát mindkét fajtából ugyanannyi buszjegy van.

21. *a)* A reformlottó minden sorsolásához (90 számból 85 darab) kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük a hagyományos lottó egy sorsolását (90 számból a kimaradt 5 darab). A telitalálat elérése egyformán nehéz.

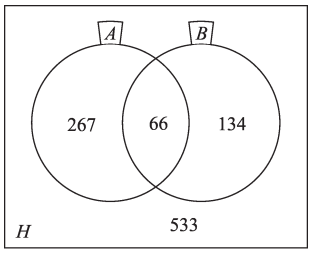
b) Mindenkinek van legalább 80 találata.

22. *a)* 15.

b) Minden kiválasztott négyszög párosítható a ki nem választott két csúcson áthaladó egyenessel, ezért ugyanannyi négyszög választható ki a csúcsokból, mint az *a)* feladatbeli egyenesek száma: 15 darab.

c) Maximális számú metszéspontot akkor kaphatunk, ha semelyik két átló metszéspontján nem megy át harmadik átló. Ekkor négy csúcs egyértelműen meghatározza két átló metszéspontját, tehát ugyannyi metszéspontot kapunk, mint a *b)* esetben: 15 darabot.

23.



23. Jelölje A a 3-mal, B az 5-tel osztható, 2000-nél nem nagyobb pozitív páros számok halmazát!

a) 3-mal osztható szám 333 darab van, ezért $|A| = 333$.

b) $|B| = 200$.

c) Ha egy egész szám osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel is. 15-tel osztható szám 66 darab van, ezért $|A \cap B| = 66$.

d) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s írjuk be az egyes tartományok elemszámát „belülről kifelé” haladva (vagyis az $A \cap B$ tartománnyal kezdve)!

Az ábra alapján 3-mal vagy 5-tel 467 szám osztható.

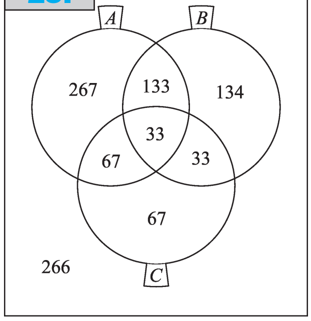
e) 533.

Más megoldási lehetőség a *d)* feladatra:

$|A \cup B|$ a kérdés. A szitaformulát alkalmazva $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| =$ $= 500 + 333 - 166 = 667$. (A 2-vel és 3-mal osztható számokat kétszer számoltuk, ezért egyszer le kell vonni őket.)

24. Mivel $60\% + 65\% = 125\%$, mindkét feladatot a versenyzők 25%-a oldotta meg. Csak a második feladatot a versenyzők $65\% - 25\% = 40\%$-a, s mivel ez 80 fő, 200-an indultak a versenyen. Az iskola tanulóinak létszáma 1000.

25.



25. Jelölje A, B, C rendre a T_2, T_3, T_5 tulajdonságú számok halmazát! Ekkor $|A| = 500$, $|B| = 333$, $|C| = 200$, $|A \cap B| = 166$, $|A \cap C| = 100$, $|B \cap C| = 66$, $|A \cap B \cap C| = 33$.

Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s írjuk be az egyes tartományok elemszámát „belülről kifelé” haladva (vagyis az $A \cap B \cap C$ tartománnyal kezdve)!

Ez alapján: *a)* 33; *b)* 266; *c)* $267 + 134 + 67 = 468$; *d)* $133 + 67 + 33 = 233$.

I

Másik megoldási lehetőség a szitaformula alkalmazása.

a) $|A \cap B \cap C| = 33$.

b) $|\overline{(A \cup B \cup C)}|$ a kérdés. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$, ezért $|\overline{(A \cup B \cup C)}| = 1000 - 734 = 266$.

c) $|A| + |B| + |C| - 2 \cdot (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 2 \cdot (166 + 100 + 66) + 3 \cdot 33 = 468$.

d) $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 166 + 100 + 66 - 3 \cdot 33 = 233$.

26. *a)* $20 + 7 + 1 = 28$;
b) $7 + 1 = 8$;
c) $7 + 20 + 1 = 28$;
d) $20 + 7 + 1 + 1 = 29$;
e) $7 + 20 + 2 = 29$;
f) $10 + 7 + 1 = 18$ (amikor van piros, de nincs zöld golyó a kihúzottak között: $10 + 7$ lehetőség);
g) $20 + 7 + 1 = 28$;
h) 1 (2 golyó esetén előfordulhat, hogy van két piros, de nincs három zöld; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott golyó esetén);
i) $1 + 2 + 3 + 1 = 7$;
j) $10 + 20 + 3 + 1 = 34$;
k) $7 + 20 + 1 = 28$;
l) $7 + 20 + 1 = 28$.

27. *a)* 19;
b) 46;
c) 1 (2 zokni esetén előfordulhat, hogy van piros pár, de nincs zöld pár; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott zokni esetén);
d) 16;
e) 58;
f) 1 (2 zokni esetén előfordulhat, hogy nincs piros pár, de van zöld pár; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott zokni esetén).

28. Nem lehetséges. A három sor, három oszlop és a két átló számainak összege 8 értéket ad, míg az általuk meghatározott három szám összege -3-tól $+3$-ig 7-féle lehet, tehát vannak közöttük egyenlők.

29. A táblát átlója mentén felbonthatjuk három darab 668×333-as méretű résztáblára. Legyen pl. a 668 a vízszintes és 333 a függőleges méret; ekkor az átló a mezőket határoló egységnyi hosszú szakaszokból 667 függőlegest és 332 vízszintest metsz. (Nem tekintjük metszésnek, ha az átlónak a szakasz végpontjával van közös pontja.) A metszéspontok számánál eggyel több mezőn halad át az átló, így összesen $3 \cdot (667 + 332 + 1) = 3000$ azon mezők száma, amelyek belsejében áthalad az átló.

30. *a)* Az átló egyenesét kissé eltoljuk pl. „jobbra” úgy, hogy ne menjen át egyetlen mező csúcsán sem. Ekkor az utolsó kivételével minden sorban két mezőt metsz, összesen 15-öt.

Több mezőt nem metszhet semmilyen egyenes. Ugyanis bármely egyenes a mezőket határoló egységnyi hosszú vízszintes és függőleges szakaszokból összesen legfeljebb 16-ot metszhet (a tábla széleit is beleértve), s a metszéspontok számánál eggyel kevesebb mezőn haladhat át.

b) Hasonló okoskodással a kissé elmozgatott átló egyenese legfeljebb $2n-1$ számú mezőn haladhat át.

31. A testátló az egységkockákat határoló síkokat az egyes irányokban 10, 11, illetve 12 pontban döfi. Minden metszésponthoz rendelhetünk egy egységkockát (pl. azt, amelyiket a testátló „elhagyja” a metszéspontnál), valamint még az utolsó kis kockát is számolnunk kell. Összesen $10+11+12+1=34$ egységkockán halad át a téglatest testátlója.

32. *a)* 2 007 206. $1+2+3+\ldots+2003=\dfrac{2003\cdot 2004}{2}=2\,007\,006$. Ennyi szám található az első 2003 sorban, ezért a 2004. sor $2\,007\,006+101=$ $=2\,007\,107$-tel kezdődik. A sorban lévő 100. szám a $2\,007\,107+99=$ $=2\,007\,206$.

b) Ha a 2005 az n. sorban van, akkor $1+2+3+\ldots+(n-1)+100<2005$.
$\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}+100<2005$, innen $n\le 62$, vagyis a 2005 a 62. sorban van.
Az első 61 sorban $\dfrac{61\cdot 62}{2}=1891$ szám van, így a 62. sor első eleme $1891+101=1992$, 14. eleme a 2005.

33. *a)* Az 1. esetben $10+5+2+1+1=19$, a 2. esetben szintén 19 a mérkőzések száma.

b) Minden mérkőzés vesztese kiesik, s így az egyetlen győztes személyének megállapításához 19 kiesésre (mérkőzésre) van szükség.
Általában n játékos esetén $n-1$ mérkőzéssel lehet megállapítani a győztest.

34. *a)* Minden egyes vágással +1-gyel nő az összes papírdarab száma. A végállapotban 56 darab van, így 55 vágás szükséges.

b) Ha a már meglévő papírdarabokat pl. egymásra tehetjük, akkor minden egyes vágással legfeljebb megkétszerezhetjük a számukat. A végállapotban 56 darab van. $2^5<56<2^6$, így legalább 6 vágás kell. A felezéses technikát alkalmazva ennyi vágás elegendő is, nem nehéz a konkrét darabolást megadni. (Arra kell csak ügyelni, hogy a vágások előtt a darabokat egymásra vagy alkalmasan egymás mellé pakoljuk.)

35. *a)* Minden egyes vágással +1-gyel nő az összes darab száma. A végállapotban 512 darab kis kocka keletkezett, így 511 vágás szükséges.

b) Ha a már meglévő téglatest darabokat pl. egymásra tehetjük, akkor minden egyes vágással legfeljebb megkétszerezhetjük a darabok számát. A végállapotban 512 darab kis kocka van. $512=2^9$, így legalább 9 vágás kell. 9 vágással a darabolás meg is valósítható. A kockalapokra merőleges három irány mindegyikében elegendő 3 vágás, ha a felezéses technikát alkalmazzuk.

36. *a)* A felezéses technika segítségével 4 kérdésből ki lehet találni a gondolt számot. Ha pl. az első kérdés az, hogy „A gondolt szám legfeljebb 8?”, akkor a válasz után már csak 8 szám közül kell kitalálni Anna számát. Ugyanígy felezve a lehetőségeket, a következő kérdés után 4, majd 2, végül 1 lehetőség marad. Ez a legjobb kérdezési technika. Ha ugyanis valamelyik kérdéssel nem egyenlő arányban osztanánk két részre a lehetséges számokat, „balszerencsés” válasz esetén a nagyobbik halmazba kerülne a gondolt szám, s ezzel a halmazzal kellene folytatnunk a kérdezést.

b) Az alábbi táblázat mutatja, hogy 4 kérdés most is elegendő.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I.	x	x	x	x	x	x	x	x								
II.	x	x	x	x					x	x	x	x				
III.	x	x			x	x			x	x			x	x		
IV.	x		x		x		x		x		x		x		x	

A kérdéseket I–IV. jelöli. Minden kérdéssel az 1–16 számok egy részhalmazára kérdezünk rá. Az egyes kérdéseknél x jelet tettünk annak a számnak az oszlopába, amelyik az éppen kérdezett halmazba beletartozik. Látható, hogy a 16 különböző válaszlehetőségnek megfelelően a 16 oszlop különbözik egymástól.

37. *a)* Két mérés elegendő. Jelöljük a golyókat (1), (2), (3), (4), (5), (p)-vel, s az első méréssel hasonlítsuk össze (1) és (2) tömegét (3) és (p) tömegével! Három eset lehetséges:

1. (1) és (2) nehezebb, mint (3) és (p) (jelölés: $\underline{(1)(2)} > \underline{(3)(p)}$). Ekkor (1) vagy (2) lehet nehezebb a többi fehér golyónál, vagy (3) lehet könnyebb. Ennek eldöntésére elég (1)-et és (2)-t összehasonlítani, összesen tehát két mérés elegendő.

2. $\underline{(1)(2)} < \underline{(3)(p)}$. A megoldás hasonló az előbbihez.

3. $\underline{(1)(2)} = \underline{(3)(p)}$. A hamis golyó (4) vagy (5) lehet, kiválasztására elég pl. (1)-et és (4)-et összehasonlítani.

b) Két mérésből nem mindig tudjuk megmondani, hogy a hamis golyó könnyebb, vagy nehezebb a többinél. Az előző megoldás 3. esetében ha (1) = (4), akkor nem tudjuk megállapítani, hogy a hamis (5) „hogyan” hamis.

Más mérési eljárás sem lehet eredményes. Összesen 10 lehetőségünk van (5 golyó mindegyike lehet könnyebb, vagy nehezebb, mint a többi), egy mérés kimenetele 3-féle lehet, tehát 2 méréssel csak $3 \cdot 3 = 9$ esetet tudunk megkülönböztetni.

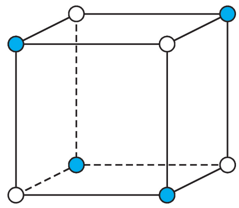
38. Következtessünk a végállapotból visszafelé! A $2^{45} \to 2^{44} \to 2^{22} \to 2^{11} \to 2^{10} \to \to 2^5 \to 2^4 \to 2^2 \to 2^1 \to 1$ lánc 9 lépés hosszú, ezért kezdetben az $1 \to 1$ négyzetre emelést alkalmazhatjuk.

39. Mindháromszor úgy gyűjtjük össze a lapokat, hogy mindig középre kerüljön az a kupac, amelyben éppen benne van a kiválasztott lap. Ekkor tudjuk, hogy az első összegyűjtés után a 27 lapból a középső 9 valamelyike a keresett kártya. A második szétrakás és összegyűjtés után a középső három lap valamelyike, végül a pakli közepe, tehát a 14. lesz a kiválasztott kártya.

40. *a)* Igen. Pl. a fedőlapon elérhető a (6, 8, 8, 8) helyzet, ezután a (8, 8, 8, 8) számok előállításakor az alaplap csúcsaiba a (3, 2, 3, 4) számok kerülnek. Innen két lépésből eljutunk a (4, 4, 4, 4) állapotba, innen pedig nyolc lépésben a (8, 8, 8, 8) állapotba.

b) A kiindulási helyzetben a csúcsokon lévő számok összege 1 (páratlan). A végállapotban minden csúcsban egyforma szám kell, hogy legyen; ezek összege 8-cal osztható (páros). Amikor az élek végpontjaiban álló számokat eggyel-eggyel megnöveljük, az összeg 2-vel nő, tehát az összeg paritása megmarad. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a kívánt végállapot nem érhető el.

40.



c) A kocka csúcsait két csoportra osztjuk úgy, hogy az azonos csoportban lévő csúcsok között ne legyen él. Az egyik csoportba sorolhatjuk az alaplap és a fedőlap két-két szemközti csúcsát (ábra). Az eljárás folyamán mindkét csoportban az ott lévő számok összege egyszerre nő 1-gyel. Mivel kezdetben ez az összeg különböző volt a két csoportban (0, illetve 2), a csupa egyforma számozás nem érhető el.

41. Egy 4 lépéses konstrukció látható az ábrán (a két üres széket OO-val jelöljük, s aláhúzzuk az éppen átülő gyerekeket).

41.

FLFLFLFLOO
FOOLFLFLLF
FFLLOOFLLF
FFLLLLFOOF
OOLLLLFFFF

4-nél kevesebb helycserével a feladat nem oldható meg. Nevezzük „jó szomszédságnak”, ha fiú fiú mellett és lány lány mellett ül. Kezdetben a „jó szomszédságok” száma 0. Az első lépésben ez legfeljebb 1-re nőhet, és a későbbiekben is csak legfeljebb kettesével növelhető. Mivel a végállapotban a „jó szomszédságok” száma 6, ezért nem elég 3 lépés. (A fenti megoldásban a jó szomszédságok száma rendre 0, 1, 3, 4, 6 volt.)

42. A 10 szám összege mindig ugyanannyi, hiszen összeadásukkor mind a két helyiértéken mind a 10-féle számjegy megjelenik.

43. Legkevesebb 10 négyzetre van szükség. Pl. cm-ben mérve 1 darab 5×5-ösre, 5 darab 2×2-esre és 4 darab 1×1-esre, vagy 1 darab 4×4-esre, 3 darab 3×3-asra és 6 darab 1×1-esre.

44. *a)* Az $a1 - h8$ és $a8 - g1$ iránnyal 7–7 párhuzamos átló van, tehát legfeljebb 14 futó helyezhető el. Ez a konstrukció meg is valósítható, pl. a tábla szélére helyezett 14 futóval.

b) Egy 2×2-es résztáblára legfeljebb 2, tehát a 8×8-as táblára legfeljebb 32 gyalog helyezhető el. Megfelelő konstrukciót kapunk, ha pl. minden második oszlopba helyezünk gyalogokat.

45. Nem. A dédapák között nagyanyám apja is szerepel, míg nagyapáim dédapjai között nincs rokona nagyanyámnak. (Érdemes felrajzolni a családi származások öt mélységű gráfját.)

46. 31 napos hónap esetén 20-a a hét 3 napjával, 30 napos hónap esetén 2 nappal, februárban pedig 1 nappal tolódik el. Január 20-a csütörtök, 30-a vasárnap, így az egyes hónapok 20. napjait (20) és 30. napjait (30) az alábbi táblázatból olvashatjuk ki:

I

Napok	1 (31)	2 (29)	3 (31)	4 (30)	5 (31)	6 (30)	7 (31)	8 (31)	9 (30)	10 (31)	11 (30)	12 (31)
hétfő			20							20	20	
kedd					30	20						
szerda								30	20			20
csütörtök	20		30	20			20				30	
péntek						30				20		
szombat					20				30			30
vasárnap	30	20		30			30	20				

20-a csütörtökre, 30-a vasárnapra esett leggyakrabban (háromszor). 13-a és 20-a minden hónapban azonos napra esik, így péntek 13-a csak egyszer volt 2000-ben, októberben.

47. *a)* A szám $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 9000 \cdot 4 = 38\,889$ jegyű.

b) Az 1-es számjegyet 0001-től 9999-ig minden helyiértéken 1000-szer írtuk le, összesen 4000-szer. Hasonló a helyzet a 2, 3, …, 9 számjegyekkel. A 0-t az egyes helyiértéken 999-szer, a tízes helyiértéken 990-szer és a százas helyiértéken 900-szor, összesen 2889-szer írtuk le.

c) $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 605 \cdot 3 = 2004$. A 605. háromjegyű szám az 506, a 2004. leírt számjegy 6-os.

48. *a)* Egyetlen mérés elegendő. Az első ládából 1, a másodikból 2, … , az ötödikből 5 súlyt helyezünk a mérlegre. A 15 kg-nál annyi dkg-mal mutat többet a mérleg, ahányadik ládában vannak a hamis súlyok.

b) Ismét elég egyetlen mérés. Most az egyes ládákból rendre 1, 2, 4, 8, 16 darabot helyezünk a mérlegre, s a 31 kg feletti dkg-értékből következtethetünk a hamis ládákra. Ha pl. 31 kg 7 dkg a mért érték, a 7-et felírjuk 2-es számrendszerbeli ötjegyű számként: $7 = 00111$, s ez mutatja, hogy az első három ládában vannak hamis súlyok.

49. A legnehezebb golyót 7 méréssel meghatározhatjuk: 4 pár összehasonlítása után a nehezebbekből 2 párt készítünk, majd ezután a két legnehezebbet hasonlítjuk össze. A második legnehezebb golyó csak azok közül kerülhet ki, amelyeket korábban a legnehezebbel párosítottunk. Ebből a három golyóból már két további méréssel meghatározhatjuk a legnehezebbet.

Permutációk, variációk

Permutációk

50. 6 darab; *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB*, *CBA*.
51. 6 darab, hasonlóan az 50. feladathoz.
52. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.
53. $4! = 24$.
54. $5! = 120$. Pl. a fiúkat sorba állítjuk, és hozzájuk párosítjuk a lányokat.
55. $5! = 120$.

56. *a)* 10!; *b)* n!.
57. 6! = 720. A B halmaz elemeinek minden sorrendje egy hozzárendelést is meghatároz.
58. 5 golyó van, 5! = 120.
59. „Elég jó” megoldásnak számít a hárombetűs szavak körében, ha úgy adunk meg két mássalhangzó között egy magánhangzót, hogy a szó megfordításán kívül még legalább egy további szót is alkothassunk. Pl. a T, $É$, L betűk ilyenek.

Ismétléses permutációk

60. *a)* Ha a két ’a’ különböző betű lenne, 4!-féle szót készíthetnénk. Mivel nem különbözők, az a_1ba_2c és az a_2ba_1c szavakhoz hasonlóan minden szót kétszer számoltunk, így összesen $\frac{4!}{2} = 12$-féle szó készíthető.
b) Ha a három ’a’ különböző betű lenne, 5!-féle szót készíthetnénk. Mivel nem különbözők, minden $aaabc$ típusú tényleges sorrendet $a_1a_2a_3bc$, $a_1a_3a_2bc$ stb. alakokban annyiszor vettünk figyelembe, ahányféleképpen a három ’a’ betűt egymás között permutálhatjuk. Eredmény: $\frac{5!}{3!} = 20$.
c) A két ’a’ és a két ’b’ betű miatt az 5 különböző elem sorrendjeit kétszer osztani kell 2!-sal. $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.
d) $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.
61. Jó megoldásnak számít, ha három értelmes szó készíthető a betűkből; pl. E, E, K, Z.
62. *a)* 3; *b)* $\frac{4!}{2} = 12$; *c)* $\frac{5!}{2} = 60$; *d)* $\frac{6!}{3!} = 120$; *e)* $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$; *f)* $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$; *g)* $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$; *h)* $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.
63. Az a, a, b, b, c, c elemek minden permutációja egy függvényt határoz meg. Összesen $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$-féle függvény van.

Variációk

64. *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; *b)* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; *c)* $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
65. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
66. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
67. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.
68. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, legalább 6 különböző számjegy kell.
69. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

I

Ismétléses variációk

70. $3 \cdot 3 = 9$ darab; AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.
71. *a)* $4^3 = 64$; *b)* $5^3 = 125$; *c)* $6^3 = 216$.
72. 10^5.
73. 3^{14}. Minden mérkőzés végeredménye 3-féle lehet.
74. $2^9 - 1$. Minden mező állapota kétféle lehet, lyukasztott vagy sem; s ebből a 2^9 lehetőségből ki kell hagyni a nem lyukasztott buszjegyet.
75. $\overline{abba}$ típusú négyjegyű számból $9 \cdot 10 = 90$ darab van ($a \neq 0$). Ezek a számok 11-gyel mindig oszthatók, s ha négyzetszámok, akkor 121-gyel is. Végigpróbálva a lehetséges $121 \cdot 9$, $121 \cdot 16$, $121 \cdot 25$, $121 \cdot 36$, $121 \cdot 49$, $121 \cdot 64$, $121 \cdot 81$ számokat, egyik sem lesz megfelelő.
76. *a)* $2^5 = 32$. A legnagyobb helyiértéken 1-es áll, a többi 5 helyiérték kétféle lehet.
b) $2^6 = 64$. Mind a 6 helyiérték 0 vagy 1 lehet.
77. 2^{k-1}, illetve 2^k.
78. $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$. A 32 fog mindegyikének állapota 2-féle lehet.
79. $3^{32} + 1 \approx 1{,}85 \cdot 10^{15}$. Ennyi ember viszont nem él a Földön!
80. $10^3 = 1000$ próbálkozás ideje 6000 másodperc, vagyis 100 perc.
81. *Első megoldás:* Felsorolhatjuk a részhalmazokat: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
Második megoldás: A részhalmazba minden elem vagy beletartozik, vagy nem; ez $2^3 = 8$ lehetőség.
82. 6^6. Az alaphalmaz mindegyik eleméhez a 6 darab B-beli elem bármelyike rendelhető.
83. Legalább 3 különböző számjegy kell: $3^5 = 243$.

Vegyes feladatok a permutációk és variációk témaköréből

84. A számok elején nem állhat 0. *a)* $3 \cdot 3! = 18$; *b)* $\dfrac{4 \cdot 4!}{2} = 48$;
c) $\dfrac{5 \cdot 5!}{2 \cdot 2} = 150$; *d)* $\dfrac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2} = 26\,880$.
85. Az utolsó helyiértéken páros, illetve páratlan számjegynek kell lennie.
a) $2 \cdot 4! = 48$; *b)* $3 \cdot 4! = 72$.
Háromjegyű számok esetén: *a)* $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$; *b)* $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.
86. *a)* Az utolsó helyiértéken páros számnak kell állnia. Ha az utolsó jegy 0, akkor 4!-féle, ha az utolsó jegy 2 vagy 4, akkor $2 \cdot 3 \cdot 3!$-féle szám készíthető. Összesen $4! + 2 \cdot 3 \cdot 3! = 60$.
b) $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$.
Háromjegyű számok esetén: *a)* $4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 30$;
b) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.
87. Két esetet vizsgálhatunk az utolsó jegy alapján. $5! + 4 \cdot 4! = 216$.

I

88. *a)* Ha az utolsó jegy 0, akkor az 1, 1, 1, 2, 2, 3 számjegyekből $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$-féle szám készíthető; ha az utolsó jegy 2, akkor a 0, 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből $\frac{5 \cdot 5!}{3!}$-féle szám készíthető. Összesen: $\frac{6!}{3! \cdot 2!} + \frac{5 \cdot 5!}{3!} = 160$.

b) Ha minden számjegy különböző lenne, akkor $4 \cdot 5 \cdot 5!$-féle számot készíthetnénk. Az egyforma jegyek miatt összesen $\frac{4 \cdot 5 \cdot 5!}{3! \cdot 2!} = 200$-féle szám van.

89. $\frac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2!} + \frac{7 \cdot 8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 26\,880 + 35\,280 = 62\,160$.

90. Az összes esetből (négyjegyű számok) kivonjuk a rossz eseteket (amelyekben nem szerepel a 3-as): $6^4 - 5^4 = 671$.

91. $6^5 - 5^5 = 4651$.

92. $26^2 \cdot (10^4 - 1) = 6\,760\,000$, ebből ki kell hagyni a 0000-típusúakat, amelyek száma 26^2. Összesen 6 759 324-féle rendszámtábla van.

93. Olyan rendszámtábla, melyben nem ismétlődik számjegy, $26^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 26^2 \cdot 5040$ darab van. Amelyben van számjegyismétlődés, $26^2 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 = 26^2 \cdot 4960$ darab; tehát a másik fajtából van több.

94. $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$; kihagyva a 000 típusúakat, az eredmény 17 558 424.

95. Az előző feladatok megoldása alapján $17\,558\,424 > 6\,759\,324$; új típusú rendszámtábla több van.

96. Az összes hatjegyű szám számából kivonjuk azok számát, amelyekben minden számjegy páratlan. $9 \cdot 10^5 - 5^6 = 884\,375$.

97. $5^3 = 125$.

98. $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

99. Az első jegy 1-es, így 4 darab 1-es és 3 darab 0 számjegy összes permutációjának számát kell meghatározni: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.

100. $\frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + 7 + 1 = 64$. A 0 számjegyek száma lehet 3, 2, 1 vagy 0.

101. *a)* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; *b)* $4 \cdot 3 = 12$; *c)* $4 \cdot 3 = 12$.
d) Ha egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk: *a)* 6^3; *b)* 6^2; *c)* 6^2.

102. Ha a 0 marad ki: $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$; ha 1-es marad ki: $\frac{5 \cdot 5!}{3!} = 100$; ha 2-es marad ki: $\frac{5 \cdot 5!}{2! \cdot 2!} = 150$; ha 3-as marad ki: $\frac{5 \cdot 5!}{3! \cdot 2!} = 50$ lehetőség van. A hatjegyű számok száma ezek összege: 360.

103. Az összes számból kivonjuk azok számát, melyekben nincs ismétlődő számjegy: $7 \cdot 8^4 - 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 22\,792$.

104. Az összes számból kivonjuk azok számát, melyekben nincs 1-es.
a) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3720$; *b)* $7 \cdot 8^4 - 6 \cdot 7^4 = 14\,266$.

I

105. Az első 5 helyiértéken tetszőleges számok szerepelhetnek: $9 \cdot 10^4$. Ha az első 5 számjegy összege páratlan volt, az utolsó helyiértékre 1, 3, 5, 7, 9 kerülhet; ha az első 5 számjegy összege páros volt, akkor az utolsó helyiértékre 0, 2, 4, 6, 8-at írhatunk. Vagyis az utolsó helyiértékre mindkét esetben 5-féle számjegy kerülhet, az eredmény $5 \cdot 9 \cdot 10^4 = 450\,000$.

106. Az utolsó helyiértékre vagy 0, vagy 2-es kerül: $\dfrac{5!}{3!} + \dfrac{4 \cdot 4!}{3!} = 36$.

107. 10 000-től 99 999-ig 90 000 szám van. Ezek közül minden második, harmadik, illetve negyedik megfelelő.
a) 18 000; *b)* 30 000; *c)* 22 500.

108. $3 \cdot 10^{99}$. A $9 \cdot 10^{99}$ darab százjegyű szám közül minden harmadik osztható hárommal.

109. Komplementer leszámolással $5^3 - 4^3 = 61$.

110. Komplementer leszámolást alkalmazunk.
a) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 27\,120$;
b) $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4 = 87\,500$.

111. $2^8 = 256$. Minden helyiértékre kétféle számjegyet írhatunk, 5-öst vagy 6-ost.

112. *a)* $\dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$. A számjegyek összege csak akkor lesz osztható 9-cel, ha 4 darab 4-es és 4 darab 5-ös számjegyet használunk fel.
b) Két ilyen szám van, a csak 4-esekből, illetve a csak 5-ösökből álló 9 jegyű számok.

113. *a)* Az első hét helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ha az első hét számjegy összegének maradéka
−3-mal osztva 0, akkor az utolsó helyiértékre 3 vagy 6 kerül;
−3-mal osztva 1, akkor az utolsó helyiértékre 2 vagy 5 kerül;
−3-mal osztva 2, akkor az utolsó helyiértékre 1 vagy 4 kerül.
Vagyis az utolsó helyiértékre mindhárom esetben 2-féle számjegyet írhatunk, összesen $6^7 \cdot 2$ darab 3-mal osztható szám van.
b) Az előző gondolatmenettel $5 \cdot 6^6 \cdot 2 = 466\,560$.
c) Most az utolsó hét helyiértékre írunk tetszőleges számjegyeket. Ezek összegének 3-mal vett maradékától függően az első számjegy rendre 3 vagy 6; 2 vagy 5; 1 vagy 4 lehet; vagyis minden esetben 2-féle. A megoldás $7^7 \cdot 2 = 1\,647\,086$.

114. $7^{99} \cdot 2 \approx 9{,}24 \cdot 10^{83}$.

115. A középső három helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ha ezek összegének maradéka
− 3-mal osztva 0, akkor az első helyiértékre 3, 6 vagy 9 kerül;
− 3-mal osztva 1, akkor az első helyiértékre 2, 5 vagy 8 kerül;
− 3-mal osztva 2, akkor az első helyiértékre 1, 4 vagy 7 kerül.
Vagyis az első helyiértékre mindhárom esetben 3-féle számjegyet írhatunk, összesen $10^3 \cdot 3 = 3000$ megfelelő szám van.

116. 3-mal osztható ötjegyű szám összesen $3 \cdot 10^4 = 30\,000$ darab van. Ezek közül olyan, amelyikben nincs 6-os számjegy, $8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 17\,496$ darab van. (Az első négy helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ezek összegének 3-mal vett maradékától függően az utolsó számjegy rendre 0, 3 vagy 9; 1, 4 vagy

7; 2, 5 vagy 8 lehet; vagyis minden esetben 3-féle.) A komplementer leszámolás módszerével az eredmény $3 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 12\,504$.

117. Az előző megoldás gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de most utoljára az első számjegyet határozzuk meg. A komplementer leszámolás módszerével az eredmény $3 \cdot 10^4 - 9^4 \cdot 3 = 10\,317$.

118. Jelöljük az AB párt G-vel, ekkor a G, C, D, E, F elemek permutációinak száma 5!. Mivel AB és BA különböző ülésrendnek számít, az eredmény $2 \cdot 5! = 240$.

119. Komplementer módszerrel $7! - 2 \cdot 6! = 3600$.

120. Az előző megoldások gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de 0 nem kerülhet a szám elejére: $6 \cdot 6! - 2 \cdot 5 \cdot 5! = 3120$.

Más megoldási lehetőség: a legfeljebb hétjegyű számokból kivonjuk azokat, amelyek 0-val kezdődnek: $7! - 2 \cdot 6! - (6! - 2 \cdot 5!)$. (Mindkét eredmény kiemelés után $26 \cdot 5! = 3120$.)

121. *a)* A padnak két széle van, ezért $8! - 2 \cdot 7! = 30\,240$.

b) Jelöljük az AB párt J-vel, a CD párt K-val, ekkor a J, K, E, F, G, H elemek permutációinak száma 6!. Mivel AB és BA, valamint CD és DC különböző ülésrendnek számít, az eredmény $2^2 \cdot 6! = 2880$.

122. *a)* Az 1, 2, 3 számokat egyetlen objektumnak tekintve 7! sorrendet kapunk. Mivel ez a három elem egymás között 3!-féleképpen permutálható, az eredmény $7! \cdot 3! = 30\,240$.

b) $7! = 5040$.

c) Mivel az 1, 2, 3 számok sorrendje egymáshoz képest rögzített, jelölhetjük őket a, a, a-val. Ekkor az a, a, a, 4, 5, 6, 7, 8, 9 elemek permutációinak száma a kérdés. Eredmény: $\dfrac{9!}{3!} = 60\,480$.

123. Az előző megoldások gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de 0 nem kerülhet a szám elejére. *a)* $7 \cdot 7! \cdot 3! = 211\,680$; *b)* $7 \cdot 7! = 35\,280$; *c)* $\dfrac{7 \cdot 7!}{3!} = 5880$.

124. Az előző feladatok megoldása alapján: $(n - k + 1)! \cdot k!$.

125. Az előző feladatok megoldása alapján: $(n - k + 1)!$.

126. Az előző feladatok megoldása alapján: $\dfrac{n!}{k!}$.

127. *a)* $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$; *b)* $4! \cdot 4! = 576$.

128. *a)* $4! \cdot 4! = 576$; *b)* $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$.

129. *a)* $4! = 24$. A két darab 1-est egy objektumnak tekinthetjük.

b) A 2-est és 3-ast egy objektumnak tekintve $\dfrac{4!}{2!}$ számú sorrend lenne, de a 23 és 32 párok különböznek, így az eredmény $2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 24$.

c) Komplementer leszámolással $\dfrac{5!}{2!} - 2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 36$.

130. *a)* $4! = 24$; *b)* $\dfrac{5!}{3!} \cdot 2 = 40$; *c)* $\dfrac{6!}{3!} - 2 \cdot \dfrac{5!}{3!} = 80$.

I

131. *a)* Jelöljük a három szomszédos 1-est A-val, így A, 2, 2, 3, 4 összes sorrendje $\frac{5!}{2!} = 60$.

b) Jelöljük a két 2-est B-vel, így 1, 1, 1, B, 3, 4 összes sorrendje $\frac{6!}{3!} = 120$.

c) Jelöljük a 3, 4 párt C-vel, így 1, 1, 1, 2, 2, C permutációinak száma $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$. De C kétféle lehet (34, illetve 43), ezért az eredmény $2 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 120$.

d) Komplementer leszámolással $\frac{7!}{3! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 300$.

132. Az előző megoldásokhoz hasonlóan járunk el, csak arra kell vigyáznunk, hogy 0-val nem kezdődhet szám. *a)* $\frac{7 \cdot 7!}{3!} = 5880$; *b)* $\frac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2!} - \frac{7 \cdot 7!}{3!} = 21\,000$; *c)* $\frac{7 \cdot 7!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 5880$; *d)* $\frac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2!} - \frac{7 \cdot 7!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 21\,000$.

133. *a)* $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 45 \approx 3{,}03 \cdot 10^{13}$; *b)* $52^8 \approx 5{,}35 \cdot 10^{13}$.

134. Legfeljebb 8 bástya helyezhető el, hiszen minden oszlopban legfeljebb 1 állhat. Az első oszlopban a bástyát 8 helyre tehetjük. A második oszlopban már csak 7 helyre (nem kerülhet az előzővel egy sorba), a harmadik oszlopban 6 helyre és így tovább. Összesen $8! = 40\,320$-féle elhelyezés lehetséges.

135. *a)* Bontsuk fel a 8×8-as táblát 16 darab 2×2-es résztáblára! Mivel minden 2×2-es résztáblára legfeljebb egy király kerülhet, a 8×8-as sakktáblára legfeljebb 16-ot helyezhetünk el. Az elhelyezés meg is valósítható, ha pl. mindegyik 2×2-es résztábla bal fölső mezőjére tesszük a királyokat.

b) 9 király elhelyezhető az előző konstrukcióval. Több nyilván nem, hiszen a 6×6-os táblára is csak 9-et tehetnénk.

136. *a)* Jelöljük $7 \to 6$-tal azt, hogy a 7-es madárnak abba a kalitkába kell kerülnie, ahol most a 6-os madár van. A következő ciklust írhatjuk fel: $7 \to 6 \to 2 \to 9 \to 8 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1 \to 7$. Ez azt jelenti, hogy bármelyik madarat kitehetjük az üres kalitkába, a többi nyolc ciklikusan a helyére költöztethető, majd őt is visszatehetjük a saját kalitkájába. Összesen $1 + 8 + 1 = 10$ költöztetésre van szükség.

b) A $3 \to 8 \to 9 \to 2 \to 7 \to 1 \to 3$ és $4 \to 5 \to 6 \to 4$ ciklusok miatt legkevesebb $6 + 1 + 3 + 1 = 11$ lépés kell.

c) Három ciklust kapunk: $3 \to 4 \to 1 \to 3$, $8 \to 9 \to 2 \to 8$, $7 \to 6 \to 5 \to 7$. Legkevesebb $4 + 4 + 4 = 12$ költöztetésre van szükség.
Általában is igaz, hogy n elem és c ciklus esetén a minimális rendezési lépésszám $n + c$.

137. *a)* Jelöljük a háromszög csúcsait 1, 2, 3-mal. Ezen elemek mind a $3! = 6$ számú permutációja meghatároz egy egybevágósági transzformációt. Pl. az (132) permutáció jelentése: az 1-es csúcs helyben maradt, a 2-es és 3-as helyet cserélt. Ez a transzformáció az 1-es csúcson áthaladó szimmetriatengelyre való tükrözés.

A 6 transzformáció: középpont körüli forgatás 0°, 120°, illetve 240°-kal, valamint három tengelyes tükrözés.

b) Jelöljük a négyzet csúcsait 1, 2, 3, 4-gyel! A 4! számú permutációból csak azok határoznak meg egybevágósági transzformációt, amelyekre teljesül, hogy szomszédos csúcsok szomszédosak maradtak. (Pl. megfelel a (2341) permutáció (ez egy forgatás), de nem lehetséges az (1324), mert az 1-es és 2-es csúcsok nem maradtak szomszédosak.) 8 egybevágósági transzformáció van: négy középpont körüli forgatás, négy tengelyes tükrözés.

c) 10 egybevágósági transzformáció van: öt középpont körüli forgatás, öt tengelyes tükrözés.

138. *a)* $4! = 24$-féle jelsorozat van. $2^4 < 24 < 2^5$, ezért legalább 5 kérdés kell, ami elég is pl. a felezéses technika alkalmazásával.

b) $4^4 = 256 = 2^8$, így 8 kérdésre van szükség. (Pl. a sorozat minden egyes jegyét 2 kérdéssel kitalálhatjuk.)

139. $a_n = n!$, ha $n \geq 0$.

Kombinációk, ismétléses kombinációk

Kombinációk

140. Bármely két ember egyszer fog kezet. *a)* $\binom{6}{2} = 15$; *b)* $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

141. A halmazok elemeiből kell kettőt úgy kiválasztanunk, hogy sorrendjükre nem vagyunk tekintettel.

a) $\binom{3}{2} = 3$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

b) $\binom{4}{2} = 6$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

c) $\binom{5}{2} = 10$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.

142. $\binom{5}{2} = 10$, mert bármely két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.

143. $\binom{5}{2} = 10$, mert bármely két pont meghatároz egy egyenest.

144. Ha n tagú a társaság, $\binom{n}{2} = 136$, innen $n = 17$.

145. Pl. az E, $É$, L, T betűkből elég sok szó készíthető.

I

146. *a)* $\binom{10}{3} = 120$; *b)* $\binom{10}{7} = 120$. Persze a két érték egyenlő, mert minden kiosztott 3 lap párosítható a ki nem osztott 7 lappal.

147. $\binom{8}{4} = 70$.

148. Minden háromszög, melynek három kék csúcsa van, párba állítható azzal a háromszöggel, amelynek egyik csúcsa piros, a másik két csúcsa pedig a kimaradt két kék pont. Ugyanannyi van tehát mind a két fajta háromszögből. (Pontosan $\binom{5}{3} = 10$ darab.)

149. Az alaphalmazból kell kiválasztanunk úgy 2, 3 stb. elemet, hogy sorrendjükre nem vagyunk tekintettel. *a)* $\binom{6}{2} = 15$; *b)* $\binom{6}{3} = 20$; *c)* $\binom{6}{4} = 15$; *d)* $\binom{6}{5} = 6$.

150. *a)* $\binom{10}{2} = 45$, mert két pont meghatároz egy egyenest.

b) n általános helyzetű pont a síkon $\binom{n}{2}$ egyenest határoz meg.

c) $\binom{10}{3} = 120$. Bármely három kiválasztott pont meghatároz egy háromszöget.

d) $\binom{10}{4} = 210$.

e) $\binom{10}{2} = 45$, mert bármely két egyenesnek egy metszéspontja van.

f) $\binom{10}{3} = 120$.

151. *a)* A $p, p, p, p, p, z, z, z, z$ elemek összes permutációjának száma $\frac{9!}{5!\cdot 4!} = 126$.

b) Válasszuk ki a 9 hosszú sorozat azon 4 helyét, ahová a zöld golyók kerülnek! Ezt $\binom{9}{4}$-féleképpen tehetjük meg, s így egyértelműen megadtuk a sorozatot is.

152. $\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$

153. *a)* $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$; *b)* $\binom{6}{3} = 20.$

154. $\binom{16}{2} = 120.$

155. A 7 : 5 végeredmény csak 5 : 5-ös állás után jöhetett létre. Ha meghatározzuk, hogy az első tíz játékból melyik 5-öt nyerte meg az egyik fél, akkor egyértelműen megadtuk a játszmasorozatot; ez pedig $\binom{10}{5} = 252$-féleképpen történhetett.

156. *a)* A 11 : 5 végeredmény csak 10 : 5-ös állás után jöhet létre. Ha meghatározzuk, hogy az első 15 labdamenetből melyik 5-öt nyerte meg a vesztes, akkor egyértelműen megadtuk a játszma lefolyását; ez pedig $\binom{15}{5} = 3003$-féleképpen történhetett.

b) A 13 : 11 végeredmény csak 11 : 11-es állás után jöhetett létre, ez pedig csak 10 : 10 után (11 : 9 állásnál vége lett volna a játéknak). A 10 : 10-es állás $\binom{20}{10}$-féleképpen jöhetett létre. A vesztes játékos a következő négy labdamenetből az elsőt vagy a másodikat nyerhette meg, így összesen $2 \cdot \binom{20}{10} \approx 369\,512$-féleképpen folyhatott le a játszma.

157. *Első megoldás:* Ha a fiúk megoszlása 1–3 (ez 4-féleképpen lehetséges), akkor az 1 fiú mellé 5 lányt kell kiválasztanunk (ez $\binom{8}{5}$- féleképpen lehetséges). Innen $4 \cdot \binom{8}{5} = 224$ lehetőséget kapunk. Ha a fiúk megoszlása 2-2, ez 3-féleképpen lehetséges, ha pl. az egyik fiút rögzítjük, és hozzá keresünk társat. A rögzített fiúpár mellé 4 lányt kell kiválasztanunk (ez $\binom{8}{4}$-féleképpen lehetséges). Innen $3 \cdot \binom{8}{4} = 210$ lehetőséget kapunk.

Összesen $4 \cdot \binom{8}{5} + 3 \cdot \binom{8}{4} = = 224 + 210 = 434$ lehetőség van.

I

Második megoldás: Az összes lehetséges csapateloszlásból kivonjuk azokat, amikor 6 lány van együtt. Összesen $\binom{12}{6} = 924$ hat fős csapat állítható össze, tehát ennek a fele, 462 párosítás lehetséges. A hat lány együtt $\binom{8}{6} = 28$-féleképpen tud csapatot alkotni. Ezeket a párosításokat kihagyjuk, így összesen $462 - 28 = 434$ lehetőség van.

158. *a)* $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$; *b)* $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$; *c)* $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$.

159. *a)* $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$; *b)* $\binom{41}{6} = 4\,496\,388$; *c)* $\binom{36}{5} = 376\,992$;

d) $\binom{36}{6} = 1\,947\,792$.

160. Az 500 termék között 20 selejtes van.

a) A 480 hibátlan termék közül kell kiválasztani 10-et: $\binom{480}{10} \approx 1{,}63 \cdot 10^{20}$-féle lehetőség.

b) A 20 selejtes termék közül kell kiválasztani 10-et: $\binom{20}{10} = 184\,756$-féle lehetőség.

c) A 480 hibátlan termékből és a 20 selejtből kiválasztunk ötöt-ötöt: $\binom{480}{5} \cdot \binom{20}{5} \approx 3{,}22 \cdot 10^{15}$-féle lehetőség.

161. $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$.

162. Először kiosztunk 32-ből 8 lapot, majd a maradék 24-ből 8-at, a 16-ból 8-at, végül a negyedik játékosnak marad az utolsó 8 lap. $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \approx$ $\approx 9{,}96 \cdot 10^{16}$.

163. Három játékos 10-10 lapot kap, kettő marad talonban, ez a kiosztás $\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \approx 2{,}75 \cdot 10^{15}$ módon lehetséges. A talonban maradt lapokat azonban a kezdő játékos úgyis felveszi, így ő valójában 12 lapot kap. Összesen tehát „csak” $\binom{32}{12} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10} \approx 4{,}17 \cdot 10^{13}$ lehetséges kezdeti kiosztás van.

164. A 6 : k végeredmény (k = 0, 1, … , 4) előtt 5 : k volt az állás. Ez $\binom{5+k}{k}$-féleképpen jöhetett ki, hiszen az 5 + k játékból ennyi módon választhatjuk ki a vesztes játékos által nyert k játékot. Ez alapján:

a 6 : 0 végeredmény $\binom{5}{0} = 1$;

a 6 : 1 végeredmény $\binom{6}{1} = 6$;

a 6 : 2 végeredmény $\binom{7}{2} = 21$;

a 6 : 3 végeredmény $\binom{8}{3} = 56$;

a 6 : 4 végeredmény $\binom{9}{4} = 126$-féleképpen jöhetett létre.

A 7 : 5 végeredmény csak 5 : 5-ös állás után lehetséges, ez $\binom{10}{5} = 252$ lehetőség.

Végül a 7 : 6 végeredmény 5 : 5-ös állás után kétféleképpen lehetséges, összesen $2 \cdot 252 = 504$-féleképpen. Egy teniszjátszma tehát $1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 + 504 = 966$-féleképpen alakulhat.

165. *a)* A 3 darab p, 4 darab z és 5 darab k elem összes permutációjának száma $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$. *b)* Válasszuk ki a 12 hosszú sorozat 3 helyét, ahová a piros golyók kerülnek! Ezt $\binom{12}{3}$-féleképpen tehetjük meg. A maradék 9 helyből válasszuk ki a 4 zöld golyó helyét, ezt $\binom{9}{4}$-féleképpen tehetjük meg, s így egyértelműen megadtuk a sorozatot is. Eredmény: $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} = 27\,720$.

166. Ha n tagú az őrség, $\binom{n}{4} = 1365$, innen $n = 15$.

167. A zöld golyók elhelyezésére 6 hely van: az 5 piros golyó között 4, előttük és utánuk 1-1. Csak egyszer választhatjuk mindegyik helyet, egyébként egymás mellé kerülne két zöld golyó. A lehetséges elhelyezések száma $\binom{6}{4}$.

168. Jelöljük a kiválasztott könyveket 1-gyel, a polcon maradtakat 0-val! Ekkor minden megfelelő kiválasztás megfelel egy 5 darab 1-esből és 7 darab

I

0-ból álló olyan sorozatnak, amelyben nincsenek 1-esek egymás mellett. A 7 darab 0 által meghatározott 8 helyből kell 5-öt kiválasztani az 1-esek számára, ezt $\binom{8}{5} = 56$-féleképpen tehetjük meg.

169. *a)* A 4 piros és 3 fehér golyót $\binom{7}{3}$-féleképpen rakhatjuk sorba. Mindegyik elrendezés 8 lehetséges helyet határoz meg a zöld golyók számára (a lerakott golyók között, illetve előttük és utánuk), ebből kell 2 különbözőt kiválasztanunk. Összesen $\binom{7}{3} \cdot \binom{8}{2} = 980$ lehetőség van.

b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3} = 525.$

c) Először tegyük le a piros és zöld golyókat! Ha a két zöld golyó egymás mellett van, akkor a piros és zöld golyókból $\binom{5}{1}$-féle sorrend készíthető, s mindegyik esetben a lerakott golyók közötti 7 helyből 4-re tehetünk pirosat: $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3} = 20$ eset. Ha a két zöld golyó nincs egymás mellett, akkor a piros és zöld golyókból $\binom{5}{2}$-féle sorrend készíthető, s mindegyik esetben a lerakott golyók közötti 7 helyből 3-ra tehetünk pirosat: $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 10$ eset.

Összesen $20 + 10 = 30$ megfelelő lánc készíthető.

170. A karkötő szerepe ebben az esetben az, hogy az eddigi lineáris modell, a sor helyett a golyókat egy kör mentén helyezzük el. A forgásszimmetria miatt 9 azonos sorrend van, amelyek ugyanazt a kört határozzák meg.

Első megoldás:

a) Ha a két zöld golyót egyetlen objektumnak tekintjük, összesen $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3}$ sorrend készíthető a golyókból. Mivel a forgásszimmetria miatt egy kört 8 sor határoz meg, a 2 zöld golyó egymás mellett $\frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3}}{8} = 35$ esetben lehet. Az összes kör száma $\frac{\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3}}{9} = 140$, az eredmény $140 - 35 = 105$.

b) A 4 piros és 2 zöld golyóból 3 kört készíthetünk (a zöld golyók lehetnek szomszédosak, vagy lehet közöttük 1 vagy 2 piros golyó). Az általuk közrefogott 6 helyből a fehér golyók számára 3-at választunk ki. Ha a zöld golyók szomszédosak vagy egy piros golyó van közöttük, akkor ezt $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen tehetjük meg. Ha azonban a zöld golyók között két piros van, a másodrendű forgásszimmetria miatt csak 10 eset lesz. Összesen $2 \cdot 20 + 10 = 50$ kör készíthető.

Második megoldás:

Elkészítjük az összes lehetséges sorozatot, majd a forgásszimmetria miatt osztunk 9-cel. Arra kell vigyázni, hogy ha pl. zöld golyók nem lehetnek egymás mellett, akkor a sorozat két szélén nem lehet egyszerre zöld golyó, hiszen a kör zárásakor egymás mellé kerülnének.

a) 4 piros és 3 fehér golyóból $\binom{7}{3}$ sorrend készíthető. Az általuk meghatározott 8 helyből a zöld golyók számára 2-t választunk ki, ezt $\binom{8}{2}$-féleképpen tehetjük meg. De a zöld golyók számára a két szélső helyet nem választhatjuk egyszerre, ezt az egy lehetőséget le kell vonnunk, s az így kapott összes sorrendet 9-cel osztanunk. Az eredmény

$$\frac{\binom{7}{3} \cdot \left(\binom{8}{2} - 1\right)}{9} = 105.$$

b) Az előző feladat megoldása alapján a piros és zöld golyóknak $\binom{6}{2}$ sorrendjük van, az általuk közrefogott 7 helyre a fehéreket $\binom{7}{3}$-féleképpen helyezhetjük el. Ebből a $\binom{7}{3}$ elhelyezésből le kell vonnunk azokat, amikor a sor két szélén egy-egy fehér golyó van. Ilyen elhelyezés 5 darab van (bármely belső helyen lehet a harmadik fehér golyó). A megfelelő körök száma tehát $\dfrac{\binom{6}{2} \cdot \left(\binom{7}{3} - 5\right)}{9} = 50$.

171. A 6, 7, 8, … , 15 cédulák közül kell kihúzni ötöt, ezt $\binom{10}{5} = 252$-féleképpen tehetjük meg.

172. $\binom{15}{5} = 3003$. Ennyi számötöst húzhatunk ki s mindegyiknek csak egyetlen sorrendje megfelelő.

I

173. *a)* Az 1, 2, … , 9 számjegyek közül válasszunk ki 7-et! Minden kiválasztás egyúttal egyetlen növekvő sorrendet is ad; ez $\binom{9}{7} = 27$ lehetőség.

b) A 9, 8, … , 0 számjegyek közül válasszunk ki 7-et! Minden kiválasztás egyúttal egyetlen csökkenő sorrendet is meghatároz; ez $\binom{10}{7} = 120$ lehetőség.

174. Három páros számot $\binom{15}{3}$, egy páros és két páratlan számot $\binom{15}{1} \cdot \binom{15}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Eredmény: $\binom{15}{3} + \binom{15}{1} \cdot \binom{15}{2} = 2030$.

175. A 16-os (hexadecimális) számrendszerben a 10, 11, 12, 13, 14, 15-nek megfelelő számjegyeket rendre A, B, C, D, E, F-fel jelöljük.

a) Ha az 1, 2, … , 9, A, B, C, D, E, F számjegyek közül kiválasztunk 5-öt, minden kiválasztás egyúttal egy növekvő számötöst is meghatároz: $\binom{15}{5} = 3003$ lehetőség.

b) Ha a 0, 1, 2, … , 9, A, B, C, D, E, F számjegyek közül kiválasztunk 5-öt, minden kiválasztás egyúttal egy csökkenő számötöst is meghatároz: $\binom{16}{5} = 4368$ lehetőség.

176. A kihúzott csavarok között pontosan k darab selejtes $\binom{20}{k} \cdot \binom{180}{10-k}$ esetben lesz, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ lehet. (Kiválasztunk k darabot a 20 selejtesből és $10 - k$ darabot a 180 hibátlanból.)

a) A fenti képletbe k helyére rendre 0, 1, 2, 3, 4-et helyettesítünk, s az így kapott értékeket összeadjuk.

b) Egyik lehetőség, hogy az általános képletbe $k \geq 4$ értékeit behelyettesítjük, s az így kapott eredményeket összeadjuk.
Másik lehetőség, ha a komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes húzás $\binom{200}{10}$-féle lehet, ebből kivonjuk az *a)* eredményét, s hozzászámoljuk a $k = 4$ esetet.

177. A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Összesen – különböző számjegyekből álló – ötjegyű szám $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$ darab van; ezek közül $\binom{9}{5}$ olyan, melynek számjegyei növekvő sorrendben állnak.

Eredmény: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - \binom{9}{5} = 27\,216 - 126 = 27\,090$.

Hasonlóan $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - \binom{10}{5} = 27\,216 - 252 = 26\,964$ azon ötjegyű számok száma, amelyekben a számjegyek nem csökkenő sorrendben állnak.

178. *a)* $\binom{20}{10} = 184\,756$; *b)* 12 fej és 8 írás összes lehetséges permutációja: $\binom{20}{8} = 125\,970$.

Ismétléses kombinációk

Hagyományosan C_n^k-val jelöljük n különböző elem k-ad osztályú kombinációinak számát. Ekkor n különböző elemből k darabot (különbözőt) választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel; ennek kiszámítása a $C_n^k = \binom{n}{k}$ képlettel történhet. Hasonlóan $C_n^{k,i}$ jelöli n különböző elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak számát. Ekkor n elemből k darabot választunk ki úgy, hogy egyes elemek többször is szerepelhetnek, és a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. A kiszámítás a $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$ képlettel történhet. Ebben és a következő részben n különböző elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak számát $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$-val jelöljük; tehát $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k}$.

179. *a) Első megoldás:* A lehetséges típusok: a, a, a; a, a, b; a, b, c. Ezekből rendre 6, $6 \cdot 5$, $\binom{6}{3}$ darab van, összesen 56.

Második megoldás: Az 1, 2, … , 6 számokból választunk ki 3-at úgy, hogy a kiválasztott számok sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy számot többször is választhatunk. $\left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}\right] = \binom{8}{3} = 56$.

b) Első megoldás: A lehetséges típusok: a, a, a, a; a, a, a, b; a, a, b, b; a, a, b, c; a, b, c, d. Ezekből rendre 6, $6 \cdot 5$, $\binom{6}{2}$, $6 \cdot \binom{5}{2}$, $\binom{6}{4}$ van, összesen $6 + 30 + 15 + 60 + 15 = 126$ darab.

Második megoldás: $\left[\begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix}\right] = \binom{9}{4} = 126$.

I

c) Első megoldás: Az 1, 2, … , 6 számokból választunk ki 10-et úgy, hogy a kiválasztott számok sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy számot többször is választhatunk. $\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \binom{15}{10} = 3003.$

Második megoldás: Kódolást alkalmazunk. A tíz kockával való minden dobáshoz rendeljünk hozzá egy 0-ákból és 1-esekből álló jelsorozatot a következőképpen: ahány 1-est, 2-est, … , 6-ost dobtunk, annyi 1-est írjunk, majd ezeket a csoportokat 0-kkal válasszuk el egymástól. Pl.: ha a dobott számok 1, 3, 1, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 4, a kód 110110101111100; vagy ha a dobott számok 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, a kód 101101010110111. Így 10 darab 1-esből és 5 darab 0-ból álló jelsorozatot kapunk. Mivel minden jelsorozat kölcsönösen egyértelműen azonosít egy dobássorozatot, a kódok számát kell meghatároznunk. Ez pedig $\binom{15}{5} = 3003.$

Megjegyzés:

A levezetés általában is alkalmazható, s ez alapján $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}.$

180. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \binom{9}{6} = 42.$

181. *a) Első megoldás:* A 7, 8, … , 15 számok közül választunk ki ötöt úgy, hogy a kiválasztott számok sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy számot többször is választhatunk: $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \binom{13}{5} = 1287.$

Második megoldás: Kódolást alkalmazunk. Helyezzük a kihúzott számokat monoton növekvő sorrendbe, s a második számhoz adjunk hozzá 1-et, a harmadikhoz 2-t, a negyedikhez 3-at, az ötödikhez 4-et! Ha pl. a kihúzott öt szám 7, 7, 8, 13, 15 volt, az így kapott számok 7, 8, 10, 16, 19. Ezzel a módszerrel elérjük, hogy az öt szám között nem lesznek egyformák. Minden húzáshoz kölcsönösen egyértelműen feleltethetjük meg a jelsorozatot, így csak ezeket kell megszámolnunk. A 7, 8, … , 19 számok közül kell kiválasztanunk ötöt, s ezt $\binom{13}{5}$-féleképpen tehetjük meg.

b) Első megoldás: Az 1, 2, … , 15 számok közül választunk ki ötöt úgy, hogy a kiválasztott számok sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy számot többször is választhatunk: $\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} = \binom{19}{5} = 11\,628.$

Második megoldás: A kihúzott számokat monoton növekvő sorrendbe rendezhetjük, s alkalmazhatjuk az *a)* megoldásbeli kódolást. Ekkor az 1, 2, … , 19 számok közül kell kiválasztanunk ötöt, s ezt $\binom{19}{5}$-féleképpen tehetjük meg.

182. *Kombináció alkalmazása:*

a) A 9 helyből válasszunk ki 3-at a zöld golyók számára, ez $\binom{9}{3} = 84$-féle lehetőség.

(Ismétléses permutáció alkalmazása: Ha a golyók különbözőek lennének, összesen 9!-féle sorrendjük lenne. De a 6 piros golyó egyforma, így osztanunk kell 6!-sal, és a 3 zöld golyó miatt 3!-sal.

Eredmény: $\frac{9!}{6! \cdot 3!}$.)

b) A 6 piros golyó által közrefogott 7 helyre tehetjük a zöld golyókat, ezt $\binom{7}{3} = 35$-féleképpen tehetjük meg.

Ismétléses kombináció alkalmazása:

a) A zöld golyók számára a 6 piros golyó által közrefogott 7 helyből választunk ki hármat úgy, hogy a kiválasztott helyek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy helyet többször is választhatunk: $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} = \binom{9}{3}$.

b) Tegyük le a 3 zöld golyót, s közéjük 1-1 pirosat! Így már nem lehetnek a zöld golyók szomszédosak, s az általuk közrefogott 4 helyre kell a maradék 4 piros golyót elhelyezni: $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = \binom{7}{4}$ lehetőség.

183. *a)* Minden tag ötödfokú, tehát x, y és z kitevőinek összege 5. Vagyis ebből a háromfajta elemből kell 5-öt kiválasztanunk a sorrendre való tekintet nélkül, s ezt $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \binom{7}{5} = 21$-féleképpen tehetjük meg.

b) Az x mellé még 4-szer választunk az x, y, z elemekből: $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \binom{6}{4} = 15$.

(Úgy is okoskodhatunk, hogy csak y-t és z-t tartalmazó tag $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \binom{6}{5} = 6$ darab van, tehát $21 - 6 = 15$ tartalmaz x-et is.)

c) Az $(y+3z)^5$ kifejezés kifejtett alakjában nem fog x szerepelni. Ebben az együtthatók összegét az $y=1$, $z=1$ helyettesítéssel kapjuk: $4^5=1024$.

d) $(2x+y+3z)^5$ kifejtett alakjában az együtthatók összegét az $x=y=z=1$ helyettesítéssel kaphatjuk meg, ez $6^5=7776$. A *c)* megoldás alapján az x-et tartalmazó tagok együtthatóinak összege $7776-1024=6752$.

184. $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\binom{8}{5}=56.$

185. *Első megoldás:* Két különböző személy $\binom{4}{2}=6$-féleképpen veheti fel a telefont. Ha egy személy veszi fel kétszer, az további 4 eset. Összesen $6+4=10$.

Második megoldás: $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\binom{5}{2}=10.$

186. Háromféle szavazati lehetőség közül (1., 2., 3. jelölt) választunk ki 20-at úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egyet-egyet többször is választhatunk: $\begin{bmatrix}3\\20\end{bmatrix}=\binom{22}{20}=231.$

187. $\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}=\binom{13}{5}=1287.$

188. $\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}=\binom{14}{5}=2002.$

189. $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\binom{7}{3}=35.$

190. $\begin{bmatrix}32\\8\end{bmatrix}=\binom{39}{8}=61\,523\,748.$

191. $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\binom{7}{5}=21.$

192. Minden mérkőzésnek háromféle kimenetele lehetséges. Ebből a három kimenetelből választunk ki 10-et a sorrendre való tekintet nélkül:
$\begin{bmatrix}3\\10\end{bmatrix}=\binom{12}{10}=66.$

193. *a)* $\binom{16}{5}=4368$; *b)* $\begin{bmatrix}16\\5\end{bmatrix}=\binom{20}{5}=15\,504.$

194. *a)* A két üres dobozt $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Ezután a maradék három doboz mindegyikébe elhelyezünk 1-1 golyót, s a maradék 11 golyót osztjuk szét a három doboz között. Összesen $\binom{5}{2}\cdot\begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix}=$ $=\binom{5}{2}\cdot\binom{13}{11}=780$ szétosztás van.

b) Pontosan 0 doboz $\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$, pontosan 1 doboz $\binom{5}{1}\cdot\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$ esetben marad üres.

Eredmény: $\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}+\binom{5}{1}\cdot\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}+\binom{5}{2}\cdot\begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix}=\binom{13}{9}+\binom{5}{1}\cdot\binom{13}{10}+\binom{5}{2}\cdot\binom{13}{11}=$ $=715+1430+780=2925.$

c) Minden golyót 1, 2 vagy 3 dobozba pakolunk. Az első esetben 1, a másodikban $\binom{5}{2}\cdot\begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$, a harmadikban $\binom{5}{3}\cdot\begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix}$ lehetőség van, az eredmény ezek összege, azaz $1+130+780=911$.

195. *a) Első megoldás:* Ha $a=1$, akkor (b, c) 7-féle lehet; ha $a=2$, akkor 6-féle; ... , ha $a=7$, akkor 1-féle. Összesen $7+6+\ldots+1=28$ lehetőség.
Második megoldás: A lehetséges típusok: $1+1+7$; $1+2+6$; $1+3+5$; $1+4+4$; $2+2+5$; $2+3+4$; $3+3+3$. Ezekből rendre 3, 6, 6, 3, 3, 6, 1 darab van, összesen 28.
Harmadik megoldás: Az $a=b=c=1$ kezdőhelyzetből kiindulva a 6-ot kell szétosztani a három változó között: $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\binom{8}{6}=28$.

b) Első megoldás: Ha $a=0$, akkor (b, c) 10-féle lehet; ha $a=1$, akkor 9-féle; ... , ha $a=9$, akkor 1-féle. Összesen $10+9+\ldots+1=55$ lehetőség.
Második megoldás: Az *a)* eset megoldásához képest további típus a $0+0+9$; $0+1+8$; $0+2+7$; $0+3+6$; $0+4+5$; a darabszámok rendre 3, 6, 6, 6, 6; összesen 27; az *a)* megoldásaival együtt 55.
Harmadik megoldás: $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}=\binom{11}{9}=55$.

196. $\begin{bmatrix}5\\30\end{bmatrix}=\binom{34}{30}=46\,376$.

197. $(6+a')+(7+b')+(8+c')+(11+d')=48$ egyenletből átalakításokkal az $a'+b'+c'+d'=16$ egyenlet megoldásszámát keressük a természetes számok halmazán, ez pedig $\begin{bmatrix}4\\16\end{bmatrix}=\binom{19}{16}=969$.

198. *Első megoldás:* A p, e, k objektumokból kiválasztható típusok: a, a, a; a, a, b; a, b, c. Ezekből rendre 3, $3\cdot2$ és 1 darab van, összesen 10.

Második megoldás: A p, e, k objektumokból választunk ki hármat úgy, hogy egy-egy objektumot többször is választhatunk, és a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel: $\left[{3 \atop 3}\right] = \binom{5}{3} = 10$.

Összetett feladatok

199. Minden sor 1-essel kezdődik és végződik; a közbülső elemek pedig a felettük lévő két elem összegével egyenlők.
200. *a)* 1; *b)* n; *c)* n; *d)* 1.
201. Igaz. Az első néhány sorban a számok szimmetrikusan helyezkednek el, a további sorokban pedig a képzési szabály miatt öröklődik a szimmetria.
202. Definíció szerint $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Végezzük el a kiválasztást egy konkrét elem (pl. az n.) helyzete alapján is! Ha az n. elem nincs a kiválasztott k darab között, akkor az első $n-1$ elemből kell k darabot kiválasztanunk, s ezt $\binom{n-1}{k}$-féleképpen tehetjük. Ha az n. elem a kiválasztott k darab között van, akkor az első $n-1$ elemből már csak $k-1$ darabot kell kiválasztanunk, ez $\binom{n-1}{k-1}$ lehetőség. Mivel az n. elem vagy a kiválasztott k darab között van, vagy nem, ebből következik, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (A táblázat sorainak elején és végén lévő számaira szintén teljesül az összefüggés.)
203. A 6. sor 3. eleme $\binom{6}{3}$, egy 6 elemű halmaznak ennyi 3 elemű részhalmaza van. (20 darab.)
204. A táblázat szimmetriája.
205. *a)* $a + b$;
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
c) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
d) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
e) $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
Az együtthatók megegyeznek a Pascal-háromszög megfelelő soraiban lévő számokkal.
206. Az $(a + b)^n$ kifejezés egy n-tényezős szorzat, kifejtett alakjában minden tag n-ed fokú lesz. A beszorzás elvégzésekor minden tényezőből vagy az a-t,

vagy a b-t választhatjuk, tehát minden tagban az a és b változók kitevője attól függ, hogy az egyes tényezőkből hányszor választottuk az a, illetve a b változót. Az $a^{n-k}b^k$ tag együtthatóját úgy kaphatjuk meg, ha ebből az n tényezőből $n-k$ esetben az a, k esetben a b tényezőt választjuk ki, s ezt $\binom{n}{k}$-féleképpen tehetjük meg. $\left(\text{Persze } \binom{n}{0} = 1.\right)$

207. Az előző feladat megoldásából már következik a tétel.

208. $(a-b)^n = \left(a+(-b)\right)^n$, így az $(a+b)^n$ kifejtett alakjában negatívok lesznek azok a tagok, amelyekben b kitevője páratlan.

Így $(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \ldots +$

$+(-1)^k \cdot \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n \cdot b^n.$

209. *a)* $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.$

b) $(3-y)^6 = 3^6 - 6\cdot 3^5y + 15\cdot 3^4y^2 - 20\cdot 3^3y^3 + 15\cdot 3^2y^4 - 6\cdot 3y^5 + y^6.$

c) $(a+1)^7 = a^7 + 7a^6 + 21a^5 + 35a^4 + 35a^3 + 21a^2 + 7a + 1.$

210. *Első megoldás:* A Pascal-háromszög képzési szabálya alapján egy-egy sor minden tagja a felette lévő két elem összegével egyenlő. Így az n. sor tagjainak összeadásakor észrevehetjük, hogy az összeg megegyezik az $(n-1)$. sor tagjai összegének kétszeresével; a kettőhatvány-tulajdonság öröklődik.

Második megoldás: Az $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$ összeg szemléletes jelentése: egy n elemű halmaz 0, 1, 2, … , n elemű részhalmazai számának összege. Minden részhalmazt összeszámoltunk, egy n elemű halmaznak pedig 2^n részhalmaza van összesen.

Harmadik megoldás: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n$ a binominális tétel szerint.

211. Az összeg 0.

Első megoldás: Alkalmazhatjuk az előző feladat első megoldásának gondolatmenetét: a váltakozó előjelű összegben az $(n-1)$. sor minden tagja mellett az ellentettje is szerepel.

Második megoldás: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{1} - \ldots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = (1-1)^n$ a binomiális tétel szerint.

212. *a)* A Pascal-háromszög képzési szabálya alapján az $(n-1)$. sorban álló elemek összegét kapjuk. Eredmény: 2^{n-1}.

b) 2^{n-1} az összeg értéke, ismét az $(n-1)$. sorban álló elemek összegét kapjuk.

Megjegyzés: Az előző feladat eredményéből is következik, hogy az összeg 2^{n-1}.

I

213. Az előző feladat megoldásaihoz hasonlóan mindkét esetben 2^{n-1} az összeg értéke.

214. A táblázatban vastagon írt 1 + 3 + 6 + + 10 + 15 számok összegét kell általános módszerrel meghatározni.

214.

1
1 1
1 2 **1**
1 3 **3** 1
1 4 **6** 4 1
1 5 **10** 10 5 1
1 6 **15** 20 15 6 1
1 7 **21** 35 35 21 7 1

$\binom{2}{2}=\binom{3}{3}$, a $\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{6}{2}$ összeg pedig tagonként összevonható: $\binom{3}{3}+\binom{3}{2}=\binom{4}{3}$, $\binom{4}{3}+\binom{4}{2}=\binom{5}{3}$, $\binom{5}{3}+\binom{5}{2}=\binom{6}{3}$, $\binom{6}{3}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}=35$. (A számokat kék háttérrel jelöltük a táblázatban.) A gondolatmenettel általában is igazolható, hogy $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+$ $+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$; vagy hasonlóan igazolható a következő általánosítás is: $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$.

215. Az n elemű halmaz egy részhalmazába minden egyes elemet vagy beleveszünk, vagy nem. Mindegyik elemmel tehát – a többitől függetlenül – kétféle eljárást végezhetünk, így az összes lehetséges részhalmaz száma 2^n.
a) 2^4; *b)* 2^5; *c)* 2^6; *d)* 2^n.
A valódi részhalmazok száma 1-gyel kevesebb.

216. A k elemű részhalmazok száma $\binom{10}{k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$), így a legalább 7 elemű részhalmazok száma $\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=176$.

217. Az 212. és 213. feladatok megoldása alapján a páros és a páratlan elemszámú részhalmazok száma 2^{n-1}, ha $n \in \mathbf{Z}^+$. Az üres halmaznak egyetlen, páros elemszámú részhalmaza van.

218. *a)* $2^5 = 32$. A maradék 5 számból minden lehetséges módon részhalmazokat képezünk, s ezekhez hozzávesszük az 1-et és a 2-t.

b) Az 1-et tartalmazó részhalmazok száma 2^6; ugyanennyi a 2-t tartalmazó részhalmazok száma is. Azon részhalmazokat, amelyekben az 1 és a 2 is benne van, kétszer számoltuk, tehát az összegből egyszer le kell vonni. Eredmény: $2^6 + 2^6 - 2^5 = 96$.

Másik megoldási lehetőség a komplementermódszer alkalmazása. Az összes részhalmazból levonjuk azok számát, amelyek sem az 1-et, sem a 2-t nem tartalmazzák: $2^7 - 2^5 = 96$.

I

c) A {2, 4, 6} halmaz részhalmazai közül kihagyjuk az üres halmazt: $2^3 - 1 = 7$.

d) $2^7 - 2^4 = 112$ (kihagytuk a csak páratlan számokból álló részhalmazokat).

e) Az {1, 4, 6} halmaznak 2^3 részhalmaza van.

f) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 99.$

219. *a)* A részhalmazokban az 5 vagy 15 (esetleg mindkettő) mellett páratlan számok szerepelhetnek. Az 5 és 15 nélkül csupa páratlan számból 2^8 darab részhalmaz képezhető. Kihagyjuk az üres halmazt, s mindegyikhez hozzávesszük az 5-öt vagy a 15-öt vagy mindkettőt. Összesen $3 \cdot (2^8 - 1) = 765$ megfelelő részhalmaz van.

b) Az 5-tel osztható számok nélkül 2^{16} részhalmaz képezhető. Mindegyikhez hozzávehetjük az {5, 10, 15, 20} egy valódi részhalmazát, ez $2^{16} \cdot (2^4 - 1)$ eset. Ki kell még hagynunk az 1-elemű részhalmazokat, ilyen van 4. Eredmény: $2^{16} \cdot (2^4 - 1) - 4 = 983\,036$.

Más megoldási lehetőség: $2^{20} - 2^{16}$ olyan részhalmaz van, melyben szerepel 5-tel osztható szám, ezek közül kell kihagynunk az 1 eleműeket.

220. 2^{n-1} számú megfelelő részhalmazt megadhatunk, pl. úgy, hogy egy rögzített elemet mindegyik részhalmazba beleteszünk. Több részhalmaz nem adható meg. Ugyanis mindegyik részhalmaz párba állítható a komplementerével (ez 2^{n-1} pár), s a kiválasztásban mindegyik párból legfeljebb az egyik tag szerepelhet.

221. *a)* $6 \cdot 5 = 30$. 6 tanuló közül kiválasztjuk azt, amelyik három tárgyat kap, a maradék 5 közül pedig azt, aki kettőt; így egyértelműen megadtuk a kiosztást.

b) A 3 tárgyat a tanuló $\binom{9}{3}$-féleképpen kaphatja meg; amelyik kettőt kap, az pedig $\binom{6}{2}$-féleképpen. A többi 4 tanulónak a tárgyakat 4! módon lehet kiosztani. Eredmény: $6 \cdot \binom{9}{3} \cdot 5 \cdot \binom{6}{2} \cdot 4! = 907\,200$.

222. $\binom{20}{3} \cdot \binom{17}{4} \cdot \binom{13}{6} = 4\,655\,851\,200.$

223. *a)* $\binom{10}{3} = 120.$

b) Ha mindhárom tárgyat ugyanaz a tanuló kapja: 10 lehetőség;
ha egy tanuló 2 tárgyat kap, egy pedig 1-et: $10 \cdot 9$ lehetőség;

I

ha három tanuló 1-1 tárgyat kap: $\binom{10}{3}$ lehetőség;

összesen $10 + 10 \cdot 9 + \binom{10}{3} = 220$.

Más megoldási lehetőség: 10-féle elemből (ezek a tanulók) választunk ki 3-at úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy elemet többször is választhatunk. Így 10 elem harmadosztályú ismétléses kombinációit kapjuk, melyek száma

$C_{10}^{3,i} = \begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix} = \binom{12}{3} = 220.$

c) $10 \cdot 9 + \binom{10}{3} = 210$.

224. *a)* $\begin{bmatrix}3\\40\end{bmatrix} = \binom{42}{40} = \binom{42}{2} = 861$.

b) $\begin{bmatrix}3\\37\end{bmatrix} = \binom{39}{37} = \binom{39}{2} = 741$. Mivel 1-1 tárgyat mindegyik tanuló kap, lényegében 37 ajándékot osztunk szét közöttük.

225. *a)* $\binom{5}{3}$-féleképpen választhatjuk ki azt a 3 dobozt, amelyekbe a golyók kerülnek. Mindegyikbe kell 1-1 golyót tenni, s a maradék 11-et is közöttük osztjuk el. Eredmény: $\binom{5}{3} \cdot \begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix} = \binom{5}{3} \cdot \binom{13}{11} = 780$.

b) $\binom{5}{3} \cdot \begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix} + \binom{5}{2} \cdot \begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix} + \binom{5}{1} \cdot \begin{bmatrix}1\\13\end{bmatrix} = 780 + 130 + 5 = 915$.

c) $\binom{5}{3} \cdot \begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix} + \binom{5}{4} \cdot \begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix} + \binom{5}{5} \cdot \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix} = 780 + 1430 + 715 = 2925$.

226. *a)* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; *b)* $10^3 = 1000$; *c)* $\binom{10}{3} = 120$; *d)* $\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix} = \binom{12}{3} = 220$.

227. *a)* Egymástól függetlenül a 6 piros golyót 7-féleképpen oszthatjuk szét (az egyik gyerek 0, 1, 2, … , 6 golyót kaphat), a 7 fehér golyót 8-féleképpen, a 8 zöld golyót 9-féleképpen. Eredmény: $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

b) A 6 piros golyót $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$, a 7 fehér golyót $\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$, a 8 zöld golyót $\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$-féleképpen oszthatjuk ki, ezért összesen $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} = \binom{8}{6} \cdot \binom{9}{7} \cdot \binom{10}{8} = 45\,360$ lehetőség van.

c) Az *a)* esetben 1-1 piros, fehér és zöld golyó kiosztása után 4 piros, 5 fehér és 6 zöld golyót kell kiosztanunk, ezt $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$-féleképpen tehetjük meg.

A *b)* esetben 3 piros, 4 fehér és 5 zöld golyó marad, ezek összes kiosztási lehetősége $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{7}{5}=3150.$

228. *a)* $\binom{28}{4}=20\,475;$ *b)* $\begin{bmatrix}28\\4\end{bmatrix}=\binom{31}{4}=31\,465;$ *c)* $28\cdot 27\cdot 26\cdot 25=491\,400;$ *d)* $28^4=614\,656.$

229. *a)* $5^8=390\,625;$ *b)* $\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}=\binom{12}{8}=495.$

c) A lehetőségeket pl. a legtöbb golyót tartalmazó doboz alapján számolhatjuk össze:

8, 0, 0, 0, 0;
7, 1, 0, 0, 0;
6, 2, 0, 0, 0; 6, 1, 1, 0, 0;
5, 3, 0, 0, 0; 5, 2, 1, 0, 0; 5, 1, 1, 1, 0;
4, 4, 0, 0, 0; 4, 3, 1, 0, 0; 4, 2, 2, 0, 0; 4, 2, 1, 1, 0; 4, 1, 1, 1, 1;
3, 3, 2, 0, 0; 3, 3, 1, 1, 0; 3, 2, 2, 1, 0; 3, 2, 1, 1, 1.
Összesen 16 lehetőség van.

d) A *c)* megoldás egyes típusai – a golyók különbözősége miatt – most többféle elhelyezést adnak. Az egyes típusok darabszámai:

8, 0, 0, 0, 0: 1 darab;

7, 1, 0, 0, 0: $\binom{8}{1}=8$ darab;

6, 2, 0, 0, 0: $\binom{8}{2}=28$ darab;

6, 1, 1, 0, 0: $\binom{8}{2}=28$ darab;

5, 3, 0, 0, 0: $\binom{8}{3}=56$ darab;

5, 2, 1, 0, 0: $\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{1}=168$ darab;

5, 1, 1, 1, 0: $\binom{8}{5}=56$ darab;

4, 4, 0, 0, 0: $\binom{8}{4}\cdot\frac{1}{2}=35$ darab (amikor kiválasztunk 4 golyót, a komplementer golyókat is kiválasztottuk);

4, 3, 1, 0, 0: $\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{1}=280$ darab;

4, 2, 2, 0, 0: $\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2}=210$ darab;

I

4, 2, 1, 1, 0: $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} = 420$ darab;

4, 1, 1, 1, 1: $\binom{8}{4} = 70$ darab;

3, 3, 2, 0, 0: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2} = 280$ darab;

3, 3, 1, 1, 0: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2} = 280$ darab;

3, 2, 2, 1, 0: $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 840$ darab;

3, 2, 1, 1, 1: $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} = 560$ darab.

Ezek összege adja a lehetséges elhelyezések számát. Eredmény: 3320.

230. *a)* Az $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6$ egyenlet megoldásszámát keressük, ha a változók a 0, 1, 2 értékeket vehetik fel. Az egyes típusok a következők:

$2 + 2 + 2 + 0 + 0$, $\binom{5}{2} = 10$ lehetőség;

$2 + 2 + 1 + 1 + 0$, $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30$ lehetőség;

$2 + 1 + 1 + 1 + 1$, $\binom{5}{1} = 5$ lehetőség.

A megoldásszám $10 + 30 + 5 = 45$.

b) A 7-es összeg előállításai:

$2 + 2 + 2 + 1 + 0$, $\binom{5}{3} \cdot 2 = 20$ lehetőség;

$2 + 2 + 1 + 1 + 1$, $\binom{5}{2} = 10$ lehetőség.

A 8-as összeg előállításai:

$2 + 2 + 2 + 2 + 0$, $\binom{5}{1} = 5$ lehetőség;

$2 + 2 + 2 + 1 + 1$, $\binom{5}{2} = 10$ lehetőség.

A 9-es összeg 5, a 10-es pedig 1-féleképpen állhat elő.

Összes lehetőség: $45 + 30 + 15 + 5 + 1 = 96$.

231. Az $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6$ egyenlet megoldásszámát keressük, ha a változók a 0, 1, 2, … , 6 értékeket vehetik fel. Az egyes típusok a következők:

$6+0+0+0+0$, ilyenből van 6 lehetőség;
$5+1+0+0+0$, ilyenből van $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség;
$4+2+0+0+0$, $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség;
$4+1+1+0+0$, $5 \cdot \binom{4}{2} = 30$ lehetőség;
$3+3+0+0+0$, $\binom{5}{2} = 10$ lehetőség;
$3+2+1+0+0$, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ lehetőség;
$3+1+1+1+0$, $5 \cdot \binom{4}{1} = 20$ lehetőség;
$2+2+2+0+0$, $\binom{5}{2} = 10$ lehetőség;
$2+2+1+1+0$, $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30$ lehetőség;
$2+1+1+1+1$, $\binom{5}{1} = 5$ lehetőség.

A megoldásszám $6 + 20 + 20 + 30 + 10 + 60 + 20 + 10 + 30 + 5 = 211$.

232. Az $x + y + z = 10$ $(x, y, z \in \mathbf{N})$ egyenlet megoldását tekinthetjük úgy is, mintha a három változót kellene 10-szer kiválasztanunk, miközben a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Eredmény: $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \binom{12}{10} = 66$.

233. Az egyenletet 5-tel osztva a 20-at kell előállítanunk különböző természetes számok összegeként.

a) Pl. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 10 = 20$ megfelelő előállítás.

b) Már a legkisebb 7 természetes szám összege is
$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, ezért a felírás nem lehetséges.

234. $2^n - 1$. A feladat tulajdonképpen az n elemből képezhető összes lehetséges részhalmaz (kivéve az üres halmaz) számát kérdezi.

235. Minden felbontást modellezhetünk a következőképpen. Tekintsünk pl. n darab 1-est, s a közöttük lévő $n - 1$ hely közül tetszőleges számúra írjunk 0-t! Minden ilyen $0 - 1$ sorozat megfeleltethető az n szám egy felbontásának úgy, hogy az első 0 előtti egyesek száma adja meg az első összeadandót, az első és második 0 közötti a másodikat és így tovább. Az n felbontásai és a lehetséges $0 - 1$ sorozatok között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés. Mivel az $n - 1$ hely mindegyikére egymástól függetlenül vagy 0-t írunk, vagy nem, a lehetséges sorozatok – és felbontások – száma 2^{n-1}.

236. *Első megoldás:* A nyolc embernek 8! permutációja van. Mivel körben ülnek, ugyanazt a kört 8 sorozat is előállítja, ezért a különböző körök száma $\frac{8!}{8} = 7!$

Második megoldás: Válasszuk ki A-t, így a kört megszakítottuk. A többi embert $-$ A-hoz képest $-$ 7!-féle sorrendben ültethetjük le.

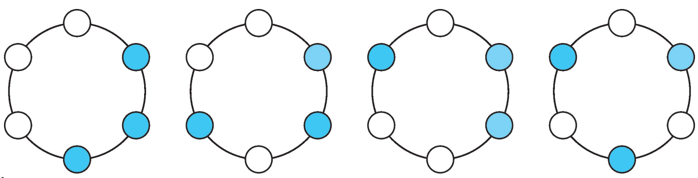
237. *a)* Az A, B párt egy objektumnak tekintve $\frac{7!}{7} = 6!$ sorrend lehetséges. Mivel A, B és B, A különböznek, az eredmény $2 \cdot 6! = 480$.
b) $5! \cdot 3! = 720$. *c)* $5! \cdot 2 \cdot 2 = 480$.

238. *a)* A házaspárokat egyetlen objektumnak tekintve 5! ültetés lehetséges. Mivel az egyes párokon belül a házastársak helyet is cserélhetnek, ezért összesen $5! \cdot 2^6$ a lehetséges ültetések száma.
b) A férfiak egymáshoz képest 5!-féle sorrendben ülhetnek le, s közéjük 6! sorrendben ültethetjük le a nőket. Összesen $5! \cdot 6!$ lehetőség. (*Másik gondolat:* $2 \cdot 6! \cdot 6!$ olyan permutáció van, melyben felváltva ülnek a férfiak és nők; s a forgásszimmetria miatt ezt még 12-vel osztani kell.)
c) Az első házaspár kétféle ültetése meghatározza a férfi$-$nő sorrendet. A szomszédos házaspár 5-féle lehet, a következő 4-féle stb., összesen $2 \cdot 5!$ ültetés van.

239. *Első megoldás:* $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}}{6} = 10$. A permutációk számát a forgásszimmetria miatt el kell osztanunk 6-tal.
Második megoldás: Pl. a zöld golyót rögzíthetjük, így megszakítjuk a kört, s hozzá képest $\binom{5}{2}$ sorrend lehetséges.
Harmadik megoldás: Ha egy fehér golyó kiválasztásával szakítjuk meg a kört, a 3 piros, 1 fehér és 1 zöld golyót $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}$-féleképpen rendezhetjük sorba, de a két fehér golyó nem különbözik, így még 2-vel osztanunk kell.

240. Most nem jó megoldás, ha az összes permutációt elosztjuk $2n$-nel, mert nem minden körre igaz, hogy $2n$ darab sorozat határozza meg. Pl. $n = 3$ esetén: a *ffkfkk* sorozat és ciklikus permutációi: *fkfkkf*, *kfkkff*, *fkkffk*, *kkffkf*, *kffkfk* ugyanazt a kört határozzák meg, tehát ezt a kört 6 sorozat állította elő; de a *fkfkfk* sorozatnak csak egy párja van, a *kfkfkf* sorozat, így a nekik megfelelő kört két sorozat állítja elő.
a) Két ilyen karkötő van; a fehér golyók lehetnek szomszédosak vagy szemköztiek.
b) *Első megoldás:* Az azonos színű golyók helyzete alapján a következő lehetőségek vannak:

240/I.

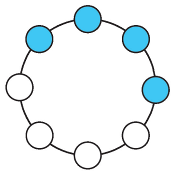


Összesen 4 ilyen karkötő van.

Második megoldás: $\binom{6}{3} = 20$ permutációja van a 3 fehér és 3 kék golyónak. Egy-egy kört határoznak meg a következő permutációk:
fffkkk ≈ *ffkkkf* stb., 6 darab sorozat;
ffkfkk ≈ *fkfkkf* stb., 6 darab sorozat;
ffkkfk ≈ *fkkfkf* stb., 6 darab sorozat;
fkfkfk ≈ *kfkfkf*, 2 darab sorozat.

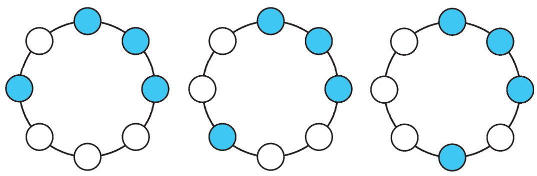
c) Első megoldás: Ha a négy kék golyó szomszédos, egy megoldás van (II. ábra).

240/II.



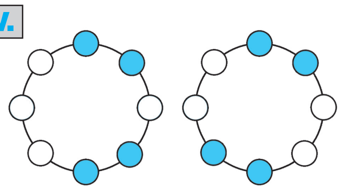
Ha csak három szomszédos kék golyó van, akkor három kört kapunk (a tengelyes tükrözés vagy térbeli elforgatás nem megengedett művelet; III. ábra).

240/III.



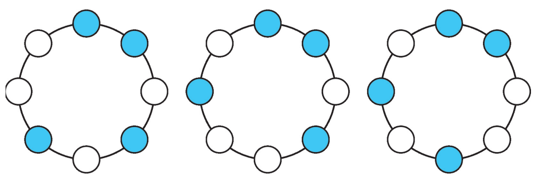
Ha két-két kék golyó szomszédos (IV. ábra):

240/IV.



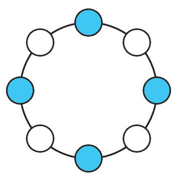
Ha csak egy kék szomszédos golyópár van (V. ábra):

240/V.



Végül ha nincsenek szomszédos kék golyók (VI. ábra):

240/VI.



Összesen 10 megoldás van.

I

Második megoldás: Összesen $\binom{8}{4} = 70$ lánc készíthető. Nézzük meg, melyek azok az ekvivalens sorozatok, amelyek nem nyolcadmagukkal határoznak meg egy kört!

1. *ffkk* duplázása és elforgatottjai:
ffkkffkk ≈ *fkkffkkf* ≈ *kkffkkff* ≈ *kffkkffk:* 4 darab;
2. *fkfk* duplázása és elforgatottjai: *fkfkfkfk* ≈ *kfkfkfkf:* 2 darab.

Tehát a 70 lehetséges láncból kivonva a fenti 6-ot, a maradék 64 lánc nyolcasával határoz meg egy kört, s ezeken kívül a fenti két kör keletkezik még. Vagyis az eredmény: $\dfrac{\binom{8}{4} - 6}{8} + 2 = 10.$

241. 2.

242. *a)* Ha kiválasztjuk az egyik lovagot (nevezzük X-nek), vele és két szomszédjával megszakítjuk a kört. Ha az X lovag a kiválasztottak között van, akkor a maradék 9 lovagból kell 4-et kiválasztani úgy, hogy szomszédosak ne legyenek közöttük. A feladat hasonló ahhoz, mint amikor 5 piros és 4 kék golyó lehetséges sorrendjeit határozzuk meg, azzal a megszorítással, hogy kék golyók nem lehetnek szomszédosak. Ilyen sorrend $\binom{6}{4}$ van. Ha X nincs a kiválasztottak között, akkor a maradék 11 lovagból kell 5 nem szomszédosat kiválasztani, ezt $\binom{7}{5}$-féleképpen tehetjük meg. A lehetőségek száma $\binom{6}{4} + \binom{7}{5} = 15 + 21 = 36.$

b) $\binom{34}{14} + \binom{35}{15} = 4\,639\,918\,800.$

243. *a)* Mivel mind a 7 lépés egymástól függetlenül 2-értékű lehet (jobbra vagy lefelé), a kiolvasások száma $2^7 = 128$.

b) Jelöljük az n lépésből álló kiolvasások számát f_n-nel! Az első lépés 2-féle lehet: L vagy J (lefelé vagy jobbra), tehát $f_1 = 2$. A második lépés 3-féle lehet: LL, JL, LJ; $f_2 = 3$. f_3 meghatározásához vegyük észre, hogy egyrészt f_2 mindig folytatható egy L lépéssel: LLL, JLL, LJL; másrészt folytatható annyi J lépéssel, ahány L-re végződő f_2-beli sorozat van: LLJ, JLJ. Ezek száma f_1, hiszen minden f_1-beli sorozatot meghosszabbíthattunk L-lel. Azt kaptuk, hogy $f_3 = f_2 + f_1$, s ez a rekurzív összefüggés a sorozat későbbi tagjaira is igaz. Innen $f_3 = 5$, $f_4 = f_3 + f_2 = 8$, $f_5 = f_4 + f_3 = 13$, $f_6 = f_5 + f_4 = 21$, $f_7 = f_6 + f_5 = 34$.

244. *a)* Jelöljük a 3. sor 4. mezőjét X-szel! B és X között 5 lépést kell tennünk, ebből 3-at jobbra, 2-t lefelé, tetszőleges sorrendben. A B-ből X-be vezető kiolvasások száma $\overline{BX} = \binom{5}{2}$. X-ből 2 lépést tehetünk még, mindkettő 2-féle lehet, jobbra vagy lefelé, ez összesen 2^2 lehetőség. Az X ponton áthaladó kiolvasások száma $\binom{5}{2}\cdot 2^2$, az X-et nem érintőké $2^7-\binom{5}{2}\cdot 2^2=88$.

b) Jelöljük a 3. sor 4. és 5. sor 2. mezőjét X-szel, illetve Y-nal! $\overline{BX}=\binom{5}{2}$, $\overline{BY}=\binom{5}{1}$. X-ből és Y-ból további 2-2 lépést tehetünk, ezért a rajtuk áthaladó kiolvasások száma $\binom{5}{2}\cdot 2^2+\binom{5}{1}\cdot 2^2=60$, az őket nem érintőké $128-60=68$.

c) Jelöljük a 2. sor 3. és 4. sor 4. mezőjét X, illetve Y-nal, s ezekből a pontokból kivezető kiolvasási utak számát $\overline{XT}$, illetve $\overline{YT}$-vel! Ekkor $\overline{BX}=\binom{3}{1}=3$, $\overline{BY}=\binom{5}{2}=10$, $\overline{XT}=2^4=16$, $\overline{YT}=2^2=4$, $\overline{XY}=2$. Az X ponton áthaladó „tiltott utak” száma $\overline{BX}\cdot\overline{XT}=3\cdot 16$, az Y ponton áthaladó „tiltott utak” száma $\overline{BY}\cdot\overline{YT}=10\cdot 4$. Ezek összegéből le kell vonni azokat a kiolvasásokat, amelyek az X és Y pontokon is áthaladnak, hiszen ezeket kétszer számoltuk. Ezek száma $\overline{BX}\cdot\overline{XY}\cdot\overline{YT}=3\cdot 2\cdot 4$. Eredmény: $48+40-24=64$.

245. 15 lépést teszünk, 4-et le és 11-et jobbra, tetszőleges sorrendben. Jelöljük a jobbra lépéseket J, a lefelé történő lépéseket L betűkkel, ekkor 11 darab J és 4 darab L betű lehetséges sorrendjeinek számát kell meghatároznunk. Összesen $\binom{15}{4}=1365$ kiolvasás van.

246. 11 darab J és 4 darab L betű összes sorrendjének a száma a kérdés, ha nem lehet egymás mellett két L. A 11 darab J betű 12 helyet határoz meg az L betűk számára, így a kiolvasások száma $\binom{12}{4}=495$.

247. Jelöljük a 2. sor 6. helyét X-szel, s pl. a kezdő E betűből az X-hez vezető kiolvasási utak számát $\overline{EX}$-szel, X-ből a végső S-hez vezető utak számát $\overline{XS}$-sel stb.! Az összes kiolvasás száma $\overline{ES}=\binom{15}{4}$, E-ből X-be $\overline{EX}=\binom{6}{1}$, X-ből S-be $\overline{XS}=\binom{9}{3}$ út vezet. Az X-en áthaladó utak száma $\overline{EX}\cdot\overline{XS}=\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}$, az X-et elkerülő utak száma $\overline{ES}-\overline{EX}\cdot\overline{XS}=\binom{15}{4}-\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}=1365-504=861$.

248. Jelöljük a 2. sor 6. betűjét és a 4. sor 9. betűjét X, illetve Y-nal! Az X-en áthaladó kiolvasási utak száma $\overline{EX}\cdot\overline{XS}=\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}$, az Y-on áthaladó utak száma $\overline{EY}\cdot\overline{YS}=\binom{11}{3}\cdot\binom{4}{1}$. Az X-en vagy Y-on áthaladó utak száma $\overline{EX}\cdot\overline{XS}+\overline{EY}\cdot\overline{YS}-$ $-\overline{EX}\cdot\overline{XY}\cdot\overline{YS}=\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}+\binom{11}{3}\cdot\binom{4}{1}-\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$, az X-et és Y-t nem érintő utak száma $\binom{15}{4}-\left(\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}+\binom{11}{3}\cdot\binom{4}{1}-\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}\right)=1365-(504+660-240)=441.$

249. $\overline{EÉ}\cdot\overline{ÉS}=\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{2}=450.$

250. Az első sor 5. betűje (H) a kezdő E pontból egyféleképpen érhető el, s innen $\binom{11}{4}$ kiolvasás lehetséges. A 2. sor 4. betűje (H) a kezdőpontból $\binom{4}{1}$-féleképpen érhető el; innen az $É$ betűre kell lépni; majd innen további $\binom{10}{3}$-féle befejezés lehet. Összesen $\binom{11}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{3}=810$ kiolvasás van.

251. Jelöljük a 4. sor 9. mezőjét X-szel! Ekkor , $\overline{EZ}=\binom{6}{1}$, $\overline{ZX}=\binom{5}{2}$, $\overline{ZS}=\binom{9}{3}$, $\overline{XS}=\binom{4}{1}$. Az összes Z-n áthaladó kiolvasás $\overline{EZ}\cdot\overline{ZS}=\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}$, ebből X-en $\overline{EZ}\cdot\overline{ZX}\cdot\overline{XS}=\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$ halad át.

Eredmény: $\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}-\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}=504-240=264.$

252. *a) Első megoldás:* A 7 lépés mindegyike 3-féle lehet, így összesen 3^7 kiolvasás van.

Második megoldás: A második sor mezőire egyetlen kiolvasási út vezet B-ből, írjuk ezt rá a három mezőre. Ezután minden további sorban annyi út vezet át az egyes mezőkön, amennyi a felette lévő három (a széleken kettő) mezőre írt számok összege, ugyanis minden mezőre a függőlegesen vagy átlósan felette lévő mezőkről érkezhetünk. Írjuk rá minden mezőre az odavezető utak számát! Az összes kiolvasási lehetőséget az utolsó sorba írt számok összege adja, ez 2187.

252.

							B							
						1	1	1						
					1	2	3	2	1					
				1	3	6	7	6	3	1				
			1	4	10	16	19	16	10	4	1			
		1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1	
1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1

b) Jelöljük az n lépésből álló kiolvasások számát f_n-nel! Az első lépés 3-féle lehet: B, L vagy J (lefelé, átlósan balra vagy jobbra), tehát $f_1 = 3$. A második lépés 8-féle lehet: BB, BL, BJ, LB, LL, LJ, JB, JL; $f_2 = 8$. f_3 meghatározásához vegyük észre, hogy egyrészt f_2 mindig folytatható egy B vagy L lépéssel: BBB, BBL, BLB, BLL stb.; másrészt annyiszor folytatható J lépéssel, ahány B-re vagy L-re végződő f_2-beli sorozat van. Ez utóbbiak száma $2 \cdot f_1$, hiszen minden f_1-beli sorozatot meghosszabbíthattunk B-vel és L-lel is. Azt kaptuk, hogy $f_3 = 2 \cdot f_2 + 2 \cdot f_1$, s ez a rekurzív összefüggés a sorozat későbbi tagjaira is igaz. Innen $f_3 = 22$, $f_4 = 2 \cdot (f_3 + f_2) = 60$, $f_5 = 2 \cdot (f_4 + f_3) = 164$, $f_6 = 2 \cdot (f_5 + f_4) = 448$, $f_7 = 2 \cdot (f_6 + f_5) = 1224$.

253. *a)* Jelöljük a 4. sor 3. elemét X-szel, ekkor $\overline{BX} = 6$, $\overline{XT} = 3^4$, $\overline{BX} \cdot \overline{XT} = 6 \cdot 3^4$. Az X-et nem érintő kiolvasások száma $3^7 - 6 \cdot 3^4 = 7 \cdot 3^5 = 1701$.

b) Jelöljük a 7. sor 10. elemét Y-nal, ekkor $\overline{BY} = 50$, $\overline{BY} \cdot \overline{YT} = 50 \cdot 3 = 150$. Mivel X-en és Y-on nem haladhat át egyszerre út, az X-et és Y-t nem érintő kiolvasások száma $3^7 - 6 \cdot 3^4 - 50 \cdot 3 = 1551$.

c) Jelöljük a 4. sor 3. és a 7. sor 7. elemét X-szel, illetve Y-nal, ekkor $\overline{BY} = 141$, $\overline{BY} \cdot \overline{YT} = 141 \cdot 3 = 423$. Vonjuk ki az összes kiolvasási út számából az X-en és Y-on áthaladókat; ekkor kétszer is kivontuk azokat, amelyek X-en és Y-on is áthaladtak, ezért egyszer hozzá kell adni számukat az összeghez.
$\overline{XY} = 6$ (ábra), így $\overline{BT} - \overline{BX} \cdot \overline{XT} - \overline{BY} \cdot \overline{YT} + \overline{BX} \cdot \overline{XY} \cdot \overline{YT} = 3^7 - 6 \cdot 3^4 - 141 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 1386$.

253.

		B	
	U	*U*	*U*
D	*D*	*D*	*D*
A	*X*	*A*	*A*
1	1	1	*P*
E	3	2	1
S	*S*	*Y*	*S*
T	*T*	*T*	*T*

254. *a)* *Első megoldás:* Az egyes lépéseknek megfelelő B, L, J betűkből képezhető sorozatok közül azoknak a számát kell meghatározni, amelyekben a B és J betűk száma megegyezik.
Ha a B és J száma 0 (L száma 8), a kiolvasások száma 1;
ha a B és J száma 1 (L száma 6), a kiolvasások száma $\frac{8!}{6!} = 56$;
ha a B és J száma 2 (L száma 4), a kiolvasások száma $\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = 420$;
ha a B és J száma 3 (L száma 2), a kiolvasások száma $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$;
ha a B és J száma 4 (L száma 0), a kiolvasások száma $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.
Összesen $1 + 56 + 420 + 560 + 70 = 1107$ kiolvasás lehetséges.
Második megoldás: Rendre írjuk rá a $\overline{BP}$ kiolvasási útvonal egyes mezőire az odavezető utak számát!

254.

				B				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
	E	*E*	*E*	*E*	*E*	*E*	*E*	
		S	*S*	*S*	*S*	*S*		
			T	*T*	*T*			
				I				

I

Ha pl. egy P pontba $\overline{BP} = 4$-féleképpen juthatunk el, akkor abból a P pontból I-be a szimmetriaviszonyok miatt szintén $\overline{PI} = 4$-féle út vezet. Ezért $1^2 + 4^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2 + 16^2 + 10^2 + 4^2 + 1^2 = 1107$ a lehetséges kiolvasások száma.

b) Minden egyes típusra meghatározhatjuk a *JJ*-t nem tartalmazó sorozatok számát.

Ha a B és J száma 0 (L száma 8), a sorozatok száma 1;

ha a B és J száma 1 (L száma 6), a sorozatok száma $\frac{8!}{6!} = 56$;

ha a B és J száma 2 (L száma 4), a sorozatok száma

$\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{7!}{4! \cdot 2!} = 315$ (kivontuk azokat az eseteket, amelyekben egymás mellett van két J);

ha a B és J száma 3 (L száma 2), a sorozatok száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} = 200$

(leraktuk a 3 B és 2 L betűt, s az általuk meghatározott 6 helyből kiválasztottunk 3-at a J-k számára);

ha a B és J száma 4 (L száma 0), a sorozatok száma $\binom{5}{4} = 5$.

Összesen $1 + 56 + 315 + 200 + 5 = 577$ kiolvasás lehetséges.

255. Jelöljük a 4. sor 3. elemét, a 6. sor 6. elemét és a 6. sor 4. elemét rendre X, Y, illetve Z-vel!

255/I.

				B				
			1	1	1			
		1	2	3	*D*	*D*		
	A	*A*	6	*A*	*A*	*A*	*A*	
P	*P*	1	1	1	*P*	*P*	*P*	*P*
	1	2	3	2	1	*E*	*E*	
		6	7	6	3	1		
			19	16	10			
				45				

a) Az I. ábra alapján $\overline{BX} = 6$, $\overline{XI} = 45$, így $\overline{BX} \cdot \overline{XI} = 6 \cdot 45 = 270$. Az X-et nem érintő kiolvasások száma $1107 - 270 = 837$. (Az előző feladat megoldása alapján $\overline{BI} = 1107$.)

255/II.

				B				
			1	1	1			
		D	2	3	2	1		
	A	*A*		7	6	3	1	
P	*P*	*P*	*P*	*P*	16	10	4	*P*
	E	*E*	*E*	*E*	*E*	30	*E*	
		S	*S*	*S*	1	1		
			T	1	2			
				3				

b) A II. ábra alapján $\overline{BY} = 30$, $\overline{YI} = 3$, így $\overline{BY} \cdot \overline{YI} = 90$. Az X-et és Y-t nem érintő kiolvasások száma $1107 - 270 - 90 = 747$.

c) A III. ábra alapján $\overline{BZ} = 51$, $\overline{ZI} = 7$, így $\overline{BZ} \cdot \overline{ZI} = 357$. Mivel $\overline{XZ} = 2$, az X-et és Z-t nem érintő kiolvasások száma $1107 - 270 - 357 + 6 \cdot 2 \cdot 7 = 627$.

255/III.

				B				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	A	3	6	7	6	3	*A*	
P	*P*	*P*	16	19	16	*P*	*P*	*P*
	E	*E*	*E*	51	*E*	*E*	*E*	
		S	1	1	1	*S*		
			2	3	2			
				7				

256. Szimmetriaokok miatt feltehetjük, hogy a tiltott mező a táblázat bal felső részén van (I. ábra).
Ha az átlón jelöljük ki a tiltott mezőt, akkor $1^2 = 1$-gyel, $4^2 = 16$-tal vagy $6^2 = 36$-tal csökken az utak száma.
Mennyivel csökken az utak száma, ha olyan mezőt hagyunk el, amelyikbe a bal felső sarokból 3 út vezet? Ha a jobb alsó sarokból haladnánk a bal felsőbe, ebbe a mezőbe $6 + 4 = 10$ út vezetne, s nyilván ennyi vezet ebből a mezőből a jobb alsóba is. Ezt a mezőt elhagyva összesen $3 \cdot 10 = 30$ a csökkenés (II. ábra).
A többi mezőt hasonlóan végignézve a 2-es mezőnél $2 \cdot 20 = 40$, az 1-eseknél $1 \cdot 5 = 5$, $1 \cdot 15 = 15$, $1 \cdot 35 = 35$ a csökkenés. (Formálisan az I. és II. táblázat azonos helyzetű mezőibe írt számok szorzatának keressük a maximumát; persze a két sarokmezőt nem számítva.) Megállapíthatjuk, hogy a 2-es mezőt (illetve középpontosan szimmetrikus párját) elhagyva csökken legjobban az utak száma. Az összes útvonal száma $\binom{8}{4} = 70$, a 2-es mezőt (vagy párját) kihagyva ez 40-nel csökken, így az utak minimális száma $70 - 40 = 30$.
Megjegyzés: Az utakat a hagyományos módon is megszámolhatjuk (III. ábra).

256/I.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	
1	3	6		
1	4			
1				

256/II.

70	35	15	5	1
35	20	10	4	1
15	10	6	3	1
5	4	3	2	1
1	1	1	1	1

256/III.

1	1	1	1	1
1	0	1	2	3
1	1	2	4	7
1	2	4	8	15
1	3	7	15	30

257. Az összes útvonal száma 321 (I. ábra).
A középső mezőt kihagyva az utak száma $13^2 = 169$-cel csökken; a 7-es mezőt kihagyva a csökkenés $7^2 = 49$, az 5-ös mezőt kihagyva $5 \cdot (5 + 7 + 13) = 125$, a 3-as mezőt kihagyva $3 \cdot 63 = 189$, s ez a legtöbb (II. ábra két táblázata).

257/I.

1	1	1	1	1
1	3	5	7	9
1	5	13	25	41
1	7	25	63	129
1	9	41	129	321

Az utak minimális száma $321 - 189 = 132$ (III. ábra).

257/II.

1	1	1	1	1
1	3	5	7	
1	5	13		
1	7			
1				

321	129	41	9	1
129	63	25	7	1
41	25	13	5	1
9	7	5	3	1
1	1	1	1	1

257/III.

1	1	1	1	1
1	0	2	4	6
1	2	4	10	20
1	4	10	24	54
1	6	20	54	132

Vegyes feladatok

258. A középső $3 \times 3 \times 3$-as kocka építőelemeinek száma 27.
259. *a)* 0; *b)* 8; *c)* $12(n-2)$; *d)* $6(n-2)^2$; *e)* $(n-2)^3$.
Megjegyzés:
$8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3$ valóban.
260. *a)* $4 \cdot 3 = 12$; *b)* $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$; *c)* $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$.
261. *a)* $\binom{8}{4}$; a 4 darab 5-ösből és 4 darab 4-esből álló számok felelnek meg.
b) 2.
262. $3 \cdot 10^2$. A legmagasabb helyiértékre írt szám 3-féle lehet, attól függően, hogy az utolsó négy számjegy összegének mennyi a 3-as maradéka.
263. A 000, 001, 002, … , 999 számok összeadásakor a három helyiérték mindegyikén minden számjegy 100-szor jelenik meg. A keresett összeg $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot 100 \cdot 3 + 1 = 13\,501$.
264. *a)* A komplementer leszámolás módszerével $9 \cdot 10^5 - 9^6 = 368\,559$.
b) A 0-t 5 helyre írhatjuk; $5 \cdot 9^5 = 295\,245$.
c) $\binom{5}{2} \cdot 9^4 = 65\,610$.
265. Az egyes tagok rendre azon hatjegyű természetes számok számát adják meg, amelyekben 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 darab 0 szerepel. Mivel ezek között minden hatjegyű számot felsoroltunk, az összeg értéke $9 \cdot 10^5 = 900\,000$.
266. *a)* Az első (legnagyobb) helyiértéken nem szerepelhet 0. A keresett számok száma $2 \cdot 3^4 = 162$.
b) $3^5 - 1 = 242$.
267. 608. A keresett x számokra $100_9 \le x \le 888_9$ és $100_{11} \le x \le AAA_{11}$. (Itt A jelenti a 10-es számjegyet 11-es számrendszerben.) Innen $100_{11} \le x \le 888_9$, $121 \le x \le 728$.
268. $3 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^3 \cdot 3$ (komplementer leszámolással; az utolsó helyiértékre írt szám 3-féle lehet, a korábbi számjegyek összegének 3-as maradékától függően).
269. *a)* $\frac{8!}{3! \cdot 2!} + \frac{7 \cdot 7!}{3! \cdot 2!} = 6300$. Vagy 0-ra, vagy 5-re végződhetnek a számok.
b) $6300 - \frac{2 \cdot 7!}{3! \cdot 2!} - \frac{2 \cdot 6 \cdot 6!}{3! \cdot 2!} = 4740$.
c) $6300 - \frac{7!}{3!} - \frac{6 \cdot 6!}{3!} = 4740$.
Megjegyzés:
A *b)* és *c)* esetben ugyanazt az eredményt kaptuk. Ennek az az oka, hogy a 2, 2, 3, 4 számokból 6 olyan sorozat készíthető, amelyben a két darab 2-es egymás mellett van, s ugyanennyi akkor is, ha a 3-as és 4-es van egymás mellett.
270. $2^6 \cdot (6!)^2 = 33\,177\,600$. A 6 fiú egy sorrendje meghatározza, ki melyik padban ül; a 6 pad mindegyikében 2 helyre ülhetnek a fiúk; s a lányok tetszőleges sorrendjét ültethetjük hozzájuk. Ha egy-egy padon belül nem számít, ki melyik széken ül, csak az, hogy adott padban ki kinek a padtársa, akkor $(6!)^2$ ültetés van; ha pedig nem számít, ki melyik padban ül, csak az a kérdés, hogy ki kinek a szomszédja, az ültetések száma 6!.

271. *a)* Az öt táncoló lányhoz $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$-féleképpen társíthatunk öt fiút. (*Egy másik megoldási lehetőség:* $\binom{7}{2}$-féleképpen hagyhatjuk ki a két fiút, s az öt fiúhoz 5!-féleképpen párosíthatjuk a lányokat.)

b) A négy lányt 5-féleképpen választhatjuk ki, s mindegyik kiválasztáshoz $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$-féleképpen párosíthatjuk a fiúkat.
Összesen $5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 4200$ lehetőség van.

272. A 4 fiú leültetése után az előttük, közöttük és utánuk lévő 5 helyből 3-ra kerülhetnek a lányok. Eredmény: $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$.

273. Bármely négy ember 2-2 párba osztva összesen három játszmát játszik, együttesen $\binom{10}{4} \cdot 3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 = 630$ mérkőzést játszanak.

(*Másik megoldási lehetőség:* két tetszőleges játékost $\binom{10}{2}$-féleképpen választhatunk, s hozzájuk egy pár ellenfelet $\binom{8}{2}$-féleképpen. Így azonban a $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}$ szorzattal minden mérkőzést kétszer számoltunk (mindkét pár oldaláról), összesen $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 630$ mérkőzést játszanak.)

274. Az első fogat $\binom{20}{4}$-féle lehet; a második már csak $\binom{16}{4}$-féle és így tovább. A fogatok egymás közötti sorrendje lényegtelen, az összeállítások száma
$$\frac{\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}}{5!} = 2\,546\,168\,625.$$

275. $\binom{n}{k} \cdot 5^{n-k}$.

276. Kiválasztunk 12 mezőt a világos, majd a maradékból 12-t a sötét gyalogok számára: $\binom{32}{12} \cdot \binom{20}{12}$. (*Másképpen:* ha a gyalogok különbözőek lennének, $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 9$ lehetőséget kapnánk; de az azonos színűek nem megkülönböztethetők, így $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 9}{12! \cdot 12!}$ lehetőség adódik.)

277. *a)* $nm(nm-1)(nm-2)\ldots(nm-k+1)$; *b)* $\binom{nm}{k}$.

278. *a)* $\binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2} = 3\,812\,256$; *b)* $\binom{64}{4} \cdot \binom{60}{4} \approx 3{,}10 \cdot 10^{11}$;

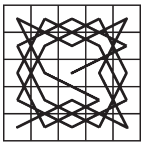
c) $\binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2} \cdot \binom{60}{2} \cdot 58 \approx 3{,}91 \cdot 10^{11}$.

279. $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 = 45\,158\,400$. Minden bástya elhelyezésekor egy sorral és egy oszloppal csökken a szabad mezők száma. Az első bástya sorát és oszlopát elhagyva a második bástyát egy 7×7-es táblára, a harmadikat egy 6×6-osra helyezhetjük el stb.

280. *a)* A 2×4-es résztáblán legfeljebb 4, így a 8×8-as sakktáblán legfeljebb 32 huszárt helyezhetünk el. Ez meg is valósítható, ha pl. minden huszárt a sakktábla fekete mezőire helyezünk.

b) Az ábrán a tábla egy ún. huszárbejárását tüntettük fel. (A töröttvonal mentén lólépésben egyszeresen végigjárhatjuk a sakktábla minden mezőjét.)

280.



Világos, hogy ha a tábla valamelyik mezőjére egy huszárt helyezünk, akkor a fenti láncban szomszédos mezőkre nem kerülhet újabb huszár. Így legfeljebb 13 huszár helyezhető el, s ezt meg is valósíthatjuk, ha a tábla 13 azonos színű mezőjére helyezzük őket.

Megjegyzés:

Az *a)* megoldásból következik, hogy általában nem jó gondolat a következő:

„A sötét mezőn álló huszár a világos színű mezőket támadja és fordítva; s mivel a két színből egyaránt 32-32 mező van, egy maximális elhelyezést kapunk, ha minden huszárt pl. a fekete mezőkre helyezünk.”

Ezzel a hibás gondolatmenettel egy 2×3-as táblára 3 huszárt helyezhetünk el, pedig valójában 4 is feltehető.

281. Ha mind az öt szám páros, $\binom{20}{5}$; ha három szám páros közöttük, $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{2}$; ha egy páros szám van közöttük, $\binom{20}{1} \cdot \binom{20}{4}$ kiválasztás lehetséges.

Összesen $\binom{20}{5} + \binom{20}{3} \cdot \binom{20}{2} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{4} = 329\,004$ a kiválasztások száma.

282. Hamis állítások: *j), p), x), z)*.

283. Legyen a három oldal $a < b < c$!

a) Az alábbi táblázatban a lehetséges háromszögeket soroltuk fel; összesen 16 darab van.

a:	2, 3, … , 8	3, 4, … , 7	4, 5, 6	5
b:	9	8	7	6
c:	10	10	10	10
db:	7	5	3	1

b)

a:	9	8	7	6	…	2
b:	10	10	10	10		10
c:	11, … , 18	11, … , 17	11, … , 16	11, … , 15		11
db:	8	7	6	5		1

Összesen $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ darab háromszög van.

c) Nincs ilyen háromszög.

284. *a)* $\binom{10}{2} - 10 = 35.$ $\left(\textit{Másképpen } \dfrac{10\cdot 7}{2} \text{ vagy } 9 + 8 + \ldots + 1 - 10.\right)$

b) $\binom{10}{4} = 210.$ (Négy csúcs határoz meg egy metszéspontot.)

c) $4 \cdot 4 = 16.$

285. *Első megoldás:* Ha a háromszög három csúcsa különböző egyenesekre esik: $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ darab háromszög van.

Ha a háromszög csúcsaiból kettő esik valamelyik egyenesre:

$\binom{5}{2} \cdot (6 + 7) + \binom{6}{2} \cdot (5 + 7) + \binom{7}{2} \cdot (5 + 6) = 130 + 180 + 231 = 541$ darab háromszög van.

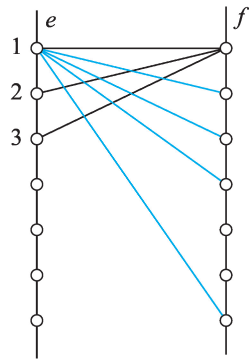
Összesen 751 háromszöget határoznak meg a pontok.

Második megoldás: Az összes lehetséges ponthármas közül kivonjuk azon hármasokat, amelyek egy egyenesre esnek. $\binom{18}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 751.$

286. A lehető legtöbb metszéspontot akkor kapjuk, ha az egyenesek közül semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik kettő metszéspontján nem megy át harmadik egyenes. Néhány megoldási módszer:

Első megoldás: Összegezhetjük az egyes szakaszokon lévő, a két egyenes közé eső metszéspontokat.

286.



Az e egyenes 1. pontjából az f egyenes 1. pontjába húzott szakaszon (továbbiakban $e_1 - f_1$) nincs metszéspont. Az $e_2 - f_1$ szakaszon $1 \cdot (m - 1)$ darab metszéspont van ($e_1 - f_2$, $e_1 - f_3$, … , $e_1 - f_m$); az $e_3 - f_1$ szakaszon $2 \cdot (m - 1)$; … ; az $e_n - f_1$ szakaszon $(n - 1)(m - 1)$. Összesítve az $e_i - f_1$ típusú szakaszokon $\dfrac{n(n-1)}{2}(m-1)$ metszéspont van.

Az $e_i - f_2$ típusú szakaszok metszéspontjainak megszámolásakor az $e_1 - f_2$ szakaszon lévőket már korábban számoltuk egyszer. Az $e_2 - f_2$ szakaszon $1 \cdot (m - 2)$ darab metszéspont van ($e_1 - f_3$, $e_1 - f_4$, … , $e_1 - f_m$); az $e_3 - f_2$ szakaszon $2 \cdot (m - 2)$ (e_1-ből és e_2-ből indulnak ki és f_3, f_4, … , f_m-ben végződnek a szakaszok); … ; az $e_n - f_2$ szakaszon $(n - 1)(m - 2)$. Összesítve az $e_i - f_2$ típusú szakaszokon $\dfrac{n(n-1)}{2}(m-2)$ metszéspont van. Hasonlóan számolhatjuk össze az $e_i - f_3$, $e_i - f_4$, … , $e_i - f_m$ típusú szakaszokon lévő metszéspontokat is; ezek száma összesen $\dfrac{n(n-1)}{2}(m - 1 + m - 2 + m - 3 + \ldots + 1) = \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \dfrac{m(m-1)}{2}.$

I

Végül észrevehetjük, hogy a két egyenes között, illetve a rajtuk kívül eső síktartományban ugyanannyi metszéspont van, mert az egyenesek közötti $e_i - f_j$ és $e_k - f_m$ metszéspontot párosíthatjuk az $e_i - f_m$ és $e_k - f_j$ metszésponttal. Így az összekötő egyenesek metszéspontjainak maximális száma $\dfrac{n(n-1)m(m-1)}{2}$.

Második megoldás: Az e, illetve f egyenesről 2–2 pontot $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2}$-féleképpen választhatunk ki, s az ezekre illeszthető egyenesek két metszéspontot határoznak meg, így összesen $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2}\cdot 2$ metszéspont keletkezik.

Harmadik megoldás: Az $m\cdot n$ számú, általános helyzetű egyenesek metszéspontjainak száma $\binom{mn}{2}$. Ebből ki kell vonni azokat, amelyek (esetleg többször számolva) az e, illetve f egyenesen keletkeznek; ezek száma $m\binom{n}{2}+n\binom{m}{2}$. Az összes metszéspont száma tehát $\binom{mn}{2}-m\binom{n}{2}-n\binom{m}{2}$.

287. Párosítsuk a vektorokat három páronként merőleges irányban! Az eredő vektor mindhárom irányban ötféle lehet (4; 2; 0 élhosszúságú, az első kettő két irányban), így összesen $5^3 = 125$-féle eredő vektort kaphatunk.

288. A legfeljebb k lépésben elérhető mezők egy $(2k+1)\times(2k+1)$-es résztáblát alkotnak, számuk $(2k+1)^2$. A pontosan k lépésben elérhető mezők ezen résztábla „kerületén” helyezkednek el, számuk $4(2k) = 8k$.

Ha csak vízszintes és függőleges lépéseket engedünk meg, a mezők száma $4k$.

289. *a)* 2^{20}; minden ugrása kétféle lehet.

b) $\binom{20}{5}$, mert 15-öt ugrik jobbra és 5-öt balra.

c) 0. Csak páros koordinátájú pontban végződhet a 20. ugrás.

d) $\binom{20}{10}$.

e) $-20; -18; -16; \ldots; 18; 20$.

290. A 34. feladat megoldása alapján

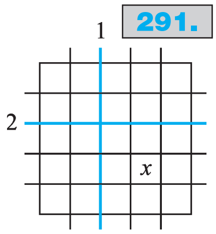
a) minden vágás +1-gyel növeli a darabszámot, ezért 63 vágás szükséges (és elegendő is);

b) minden vágás legfeljebb kétszerezi a darabszámot, ezért 8 vágás szükséges (és elegendő is).

Megjegyzés: Ha csokoládé helyett egy 8×8-as méretű papírdarabot tekintünk, és a papír hajtogatása is megengedett művelet, akkor *egyetlen* (alkalmas) egyenes vágás is elegendő.

Érdemes kipróbálni pl. egy 4×4-es méretű papírral!

291.



291. Mivel $5 \cdot 5 = 25$, és $2^4 < 25 < 2^5$, ezért legalább 5 vágásra szükségünk van. S bár a darabszámok legfeljebb kétszereződhetnek, semmi sem biztosítja, hogy 5 vágással ténylegesen elvégezhető a darabolás.
Az első két vágás után mindig marad egy legalább 3×3-as összefüggő rész (ábra). Ennek a középső (x-szel jelölt) négyzetét további négy vágással szabadíthatjuk ki, ezért összesen 6 vágás kell.

292. *a)* 0; *b)* 8; *c)* $4 \cdot (3 + 4 + 5) = 48$; *d)* $2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = 94$; *e)* $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

293. *Első megoldás:* $\binom{q}{3}(p-q) + \binom{q}{2}\binom{p-q}{2} + \binom{q}{1}\binom{p-q}{3} + \binom{p-q}{4}$.

Második megoldás: $\binom{p}{4} - \binom{q}{4}$.

294. *Első megoldás:*

$$\binom{8}{3} \cdot 19 + \binom{9}{3} \cdot 18 + \binom{10}{3} \cdot 17 + \binom{8}{2} \cdot 10 \cdot 9 + \binom{9}{2} \cdot 10 \cdot 8 + \binom{10}{2} \cdot 9 \cdot 8 + \binom{10}{2} \cdot \binom{9}{2} +$$
$$+ \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{2} = 1064 + 1512 + 2040 + 2520 + 2880 + 3240 + 1620 +$$
$$+ 1260 + 1008 = 17\,144.$$

Második megoldás: $\binom{27}{4} - \binom{8}{4} - \binom{9}{4} - \binom{10}{4} = 17\,144$.

295. *a)* 62. Minden lap kétféle lehet, ez $2^6 = 64$ lehetséges színezés; de ebből el kell hagyni a csupa egyforma színű lapokból álló két kockát.

b) Nem tekintjük különbözőnek azokat a kockákat, amelyek merev testek térbeli transzformációjával (mozgással) egymásba vihetők.
1 (illetve 5) piros lap esetén 1–1, 2 (illetve 4) piros lap esetén 2–2, 3 piros lap esetén 2 színezés lehetséges; összesen 8.

296. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, illetve $k(k-1)(k-2)$.

297. $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$, illetve $k(k-1)k$.

298. Tegyük fel, hogy a versenyző x darab helyes választ adott! Ekkor a rossz válaszok száma 0-tól $(30 - x)$-ig lehetséges, a versenyző által elérhető pontszámok $4x$, $4x - 1$, $4x - 2$, … , $5x - 30$. Ha $x \le 27$, akkor a $-30, -29, \dots,$ 108 pontok mindegyike elérhető. Ha $x = 28$, akkor csak legfeljebb két rossz válasz adható, tehát a maximális $4 \cdot 28 = 112$ pont csak 111-re vagy 110-re csökkenhet, a 109 nem érhető el. Ha $x = 29$, akkor a 113 és 114 marad ki; s ha $x = 30$, akkor a 117, 118, 119 pontok nem lehetségesek. Összesen 145-féle pontszáma lehet egy versenyzőnek.

299. Ha a világos király valamelyik sarokmezőn van, akkor a sötét király elhelyezésére 60 lehetőség adódik; ha a világos király a tábla szélén (de nem a sarokban) van, akkor 58-féle helyre tehetjük a sötét királyt; ha pedig a világos király a tábla belsejében van, a sötét király elhelyezéseinek száma 56. Összesen tehát $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 56 = 3648$-féle elhelyezés van.

I

300. *a)* $\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2} = 1260.$

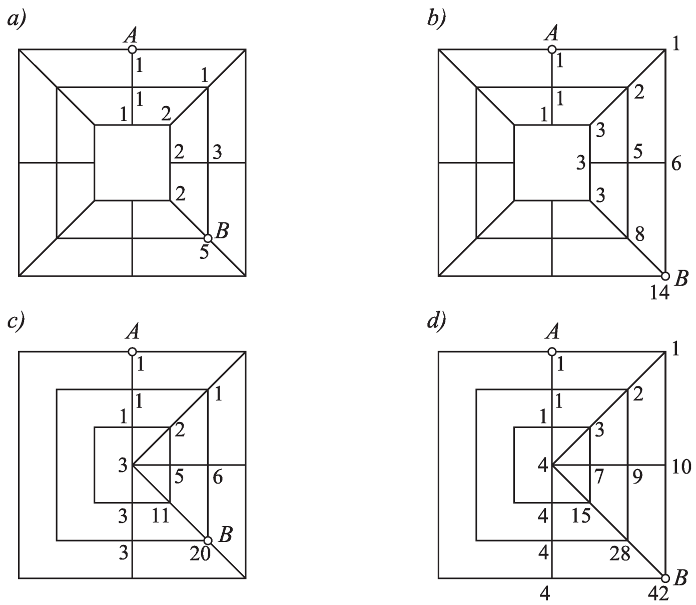
b) Ha a kétszemélyes csónakban ülnek, a lehetőségek száma $\binom{7}{3}$; ha a 3-személyesben, $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}$; ha a 4-személyesben, $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}$.
Összesen 35 + 105 + 210 = 350 lehetőség.

c) A 4-, a 3-, illetve a 2-személyes csónakban szabad hellyel számolva $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}+\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{4}+\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{3} = 1260.$ Az eredmény ugyanannyi, mint az *a)* feladatban: az üresen maradó helyet megfeleltethetjük a 9. személy ültetésének.

301. A p számú tag mellé $\binom{2n-p-q}{n-p}$-féleképpen választhatjuk ki az ugyanazon oldalon ülőket; őket és a szemben ülőket is $n!$-féle sorrendben ültethetjük le. Összesen $\binom{2n-p-q}{n-p}\cdot(n!)^2$-féle ültetés lehetséges.

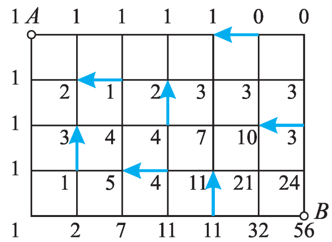
302. *a)* 5; *b)* 14; *c)* 20; *d)* 42.
Az egyes csomópontokra rendre felírtuk az odavezető utak számát (ábra).

302.



303. Összesen 56 lehetséges útvonal van. Az egyes csomópontokra rendre felírtuk az odavezető utak számát (ábra).

303.



304. A találkozás a négyzet átlója mentén történhet, négy lépés után. Fentről lefelé haladva rendre 1, 4, 6, 4, 1 út vezet mindkét oldalról a találkozási pontokba, így összesen $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$-féle úton találkozhatnak.

Megjegyzés:

Általánosíthatunk $n \times n$-es táblázatra, a formula $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots \binom{n}{n}^2$.

Egy másik megoldási lehetőség, ha az egér és a macska útját egy olyan (egyetlen) útnak tekintjük, amely az egér és a macska kezdeti helyét köti össze. Ekkor $\binom{2n}{n}$ a keresett utak száma, s nyilván a két formula egyenlő.

305. $2^4 = 16$; az angol ábécé kódolásához ennyi jel kevés.

306. 1 hosszú jel: 2 darab van; 2 hosszú: 4 darab; 3 hosszú: 8 darab; 4 hosszú: 16 darab; ez összesen 30 jel. Ez sem lenne elég.

307. 1 hosszú: 2; 2 hosszú: 4; 3 hosszú: 8; 4 hosszú: 16; 5 hosszú: 32; összesen 62 jel.

Kimaradt pl. a 3 hosszúak közül a · – –, a 4 hosszúak közül a – – – ·.

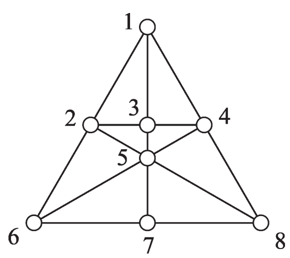
308. A pontszámok összege 10, így csak az 1; 1,5; 2; 2,5; 3 pontszámok lehetségesek. Az alábbi táblázat tartalmazza az egyes mérkőzések eredményét.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	össz:
A	–	0	1	1	1	3
B	1	–	0	0,5	1	2,5
C	0	1	–	0	1	2
D	0	0,5	1	–	0	1,5
E	0	0	0	1	–	1

309. Háromszög alatt a három csúcsból és a csúcsok között behúzott élekből álló alakzatot értjük.

Számozzuk be a csúcsokat az ábrán látható módon! Ekkor a háromszögeket egy-egy számhármassal adhatjuk meg, amelyeket pl. növekvő sorrend szerint összeszámolhatunk. (Nem lesz túlságosan sok háromszög, hiszen a $\binom{8}{3} = 56$ lehetséges ponthármas közül kimaradnak azok, amelyek egy egyenesen vannak, valamint azok, amelyeknek valamelyik éle nincs behúzva az ábrán.) A háromszögek:

309.

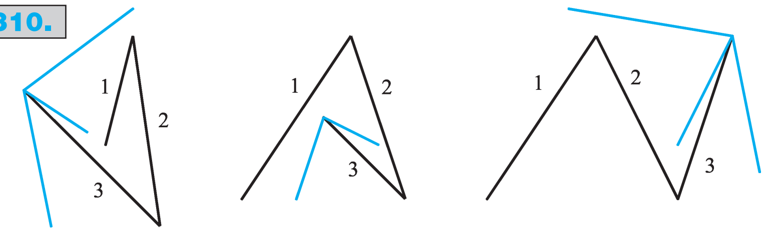


1. csúcs	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	5	5
2. csúcs	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	4	5	6	6	7
esetek száma:	4	1	2	2	2	1	1	3	1	1	1	1	1	2	1

Összesen 24 háromszög van az ábrán.

310. A 3-as lapot vagy az 1-es lap elé, vagy az 1-es és 2-es lap közé, vagy a 2-es lap mögé hajthatjuk (az ábra felülnézeti).

310.



Az első és harmadik esetben a 4-es lap három helyre kerülhet, a második esetben két helyre. Együttesen 8 lehetséges sorrendet kaptunk, ezek – balról jobbra olvasva – 4312, 3412, 3124, 1432, 1342, 4123, 1243, 1234. Ha az 1-es és 2-es lap sorrendjét felcseréljük, további 8 megoldást kapunk: 4213, 2143, 2134, 2431, 2341, 4321, 3421, 3214. Összesen 16 megoldás van.

311. *a) – b)*: A kapott kódolt szövegek:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	B	O	N	C	I	D	A		H	A	R	C	R	A		K	É	S	Z	
	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0
1.	H	N		D	A	I	C	O	A	B	Z	R	S	K	É		A	C		R
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	H	N		D	A	I	C	O	A	B	Z	R	S	K	É		A	C		R
	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0
2.	A		O	I	C	A	D	N	B	H		S	C		A	É	K	R	R	Z
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A		O	I	C	A	D	N	B	H		S	C		A	É	K	R	R	Z
	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0	8	2	7	5	6	4	3	1	9	0
3.	B	O	N	A	D	C	I		H	A	R	C	R	É	K	A		S	Z	

A 3. kódolás után egyáltalán nem lett rendezetlenebb a szöveg, a HARC szó megjelent az üzenetben. A szöveget Boncida matematikus kódfejtői bizonyára könnyedén megfejtik.

Megjegyzés:

Ha megfigyeljük az egyes betűk mozgását a kódolások folyamán, három darab ciklust kapunk: $(0 \to 8 \to 9 \to 0)$, $(1 \to 2 \to 7 \to 1)$, $(3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 3)$.

Ebből a ciklikus felírásból rögtön látszik, hogy a 0, 8, 9, valamint az 1, 2, 7 sorszámú karakterek három lépésenként a helyükre kerülnek. Ez történt a 0, 1, 8, 9 sorszámú karaktrekből álló HARC szóval is.
Mivel minden karakter 3- vagy 4-lépésenként az eredeti helyére kerül, így 12-lépésenként mindig visszaáll az eredeti szöveg.

312. Ha az első mérést a k. emeletről végezzük el, és a pohár összetörik, akkor a másik poharat az első, majd a második, a harmadik stb. emeletről rendre le kell ejteni. Vagyis legrosszabb esetben (amikor a második pohár a $(k-1)$. emeletről leejtve törik el) további $k-1$ mérésre van szükségünk.
Ha tehát összesen k mérést tervezünk, az első mérést legfeljebb a k. emeletről végezhetjük el. Ekkor, ha az első mérést a k. emeletről végezzük, és a pohár nem törik el, további $k-1$ mérésünk marad. Az előzőek alapján a k. emelet felett legfeljebb $k-1$ emelettel magasabbról végezhetjük el a második mérést. A továbbiakban a helyzet hasonló, tehát azt mondhatjuk, hogy k méréssel legfeljebb $k+(k-1)+(k-2)+\ldots+2+1=\dfrac{k(k+1)}{2}$ emelet magas épület esetében tudjuk meghatározni azt az emeletet, amelyről a poharat leejtve, az összetörik.
Ez a képlet $k=8$ esetén 36-ot ad, tehát 8 mérés elegendő a mérnök számára. Ha a poharak nem törnek el, akkor azok az emeletek, ahonnan az ejtegetést el kell végezni: 8., 8 + 7., 8 + 7 + 6. stb.

313. A fejek számának változása vágásonként -15, $+15$, -3. Látható, hogy a Sárkány fejei számának 3-as maradéka állandó. Kezdetben 1 volt a maradék, s ez az egész küzdelem alatt megmarad. A Királyfi akkor tudná legyőzni a Sárkányt, ha annak az utolsó vágás előtt 33, 21 vagy 17 feje lenne; ezek a számok azonban 3-mal osztva rendre 0, 0, 2 maradékot adnak. A Királyfi nem győzhet.

314. A fejek számának változása $+6$, $+9$, -6. A teljes küzdelem alatt a Sárkány fejeinek száma 3-mal osztva 1 maradékot fog adni, így a Királyfinak a 7 fej elérésére kell törekednie. Ezt nem érheti el csupa -6-os vágással, mert a kezdeti 100 6-tal osztva 4, míg a végső 7 6-tal osztva 1 maradékot ad. Szükség van egy $+9$-es vágásra is, tehát a minimális vágásszám 19. (Egy $+9$-es után 17 darab -6-os vágással eléri a 7 fejű állapotot, s innen egyetlen ütéssel végezhet.)

315. *a)* 15; *b)* 15 + 3 = 18; *c)* 15 + 7 = 22; *d)* 18 + 7 = 25;
e) 18 + 7 + 2 = 27.

316. A karton 36 mezőjéből 9-et kell kivágni úgy, hogy az egymásra forgatható mezők olvasáskor csak egyszer jelenjenek meg. 4–4 forgásszimmetrikus helyzetű mező egy-egy ciklust alkot, az általuk meghatározott mezők közül pontosan az egyiket kell kivágni a kartonon. A kereszt jelzi a sablon tetejét, s ha a forgásirány előre rögzített, akkor az egyes ciklusok 4 mezőjéből bármelyiket, egymástól függetlenül kiválaszthatjuk. Összesen $4^9 = 262\,144$ rostély van.
Egy minta látható az ábrán.

316.

+

1	2	3	7	4	1
4	5	6	8	5	2
7	8	9	9	6	3
3	6	9	9	8	7
2	5	8	6	5	4
1	4	7	3	2	1

317. *a)* $\binom{7}{3} \cdot \binom{8}{2} = 980.$

b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3}.$

c) Helyezzük el először a fehér és a zöld golyókat!
Ha a két zöld egymás mellett van, akkor 5-féle sorrend lehetséges, és a piros golyók számára 4 hely marad. Ez $5 \cdot \left[{4 \atop 3}\right] = 5 \cdot \binom{6}{3} = 100$ lehetőség.
Ha a két zöld golyó nincs egymás mellett, akkor $\binom{5}{2} = 10$-féle sorrend lehetséges, és a piros golyók számára 3 hely marad. Ez további $10 \cdot \left[{3 \atop 3}\right] = 10 \cdot \binom{5}{3} = 100$ lehetőség.
Összesen 200-féle sorrend lehetséges.

318. Ha az első zsinóron függő golyókat 1-es, a másodikon lévőket 2-es, … , az ötödiken lévőket 5-ös számmal jelöljük, akkor a feladat átfogalmazható: keressük az öt-öt darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös számjegyből készíthető 25 jegyű számok számát. Ez pedig $\frac{25!}{(5!)^5}$, vagy másképpen $\binom{25}{5} \cdot \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}.$

319. $8! = 40\,320 < 100\,000 < 9! = 362\,880.$ A 80 641. szám 312 456 789, a keresett szám első (legnagyobb) helyiértéke 3-as. $100\,000 - 80\,640 = 19\,360$, s mivel $7! = 5040$, $3 \cdot 7! = 15\,120 < 19\,360 < 4 \cdot 7! = 20\,160$, a második helyiértéken álló szám 5-ös. A $80\,640 + 15\,120 + 1 = 95\,761$. szám 351 246 789, s ezután még 4239 szám következik. $5 \cdot 6! = 3600$; az 1 246 789 számok utolsó 6 helyiértékén 5 permutáció „fut le”, így a következő helyiértéken álló számjegy a 8-as lesz. A 358 124 679 szám a $95\,760 + 3600 + 1 = 99\,361$. a sorban, még 639-et kell leszámolni. $5 \cdot 5! = 600$; a 124 679 számok utolsó 5 jegye 5-ször végezhet teljes permutálódást, így előre a 9-es kerül. A 358 912 467 kezdőszám után a 39. számot keressük. $4! = 24$, a 35 892 után az 1467 permutációkból a 16-ot keressük; a 358 926 után pedig a 147 közül a 4-et. Ez a 471, így a keresett szám 358 926 471.

320. *a)* $2^{10} = 1024.$

b) 0.

c) Jelöljük a két irányba történő ugrások számát J-vel és B-vel; ekkor $J + B = 10$ és $2J - B = 11$. Innen $J = 7$, $B = 3$, s az ugrássorozat összesen $\binom{10}{3} = 120$-féleképpen tehető meg.

d) Ha $J = 10, 9, 8, \ldots, 0$, akkor a végső tartózkodási hely rendre $20, 17, 14, \ldots, -10$ lehet.

321. Az ötszög csúcsait számozzuk meg az ábra szerint, s vizsgáljuk meg, hogyan hat a két transzformáció szorzata az egyes csúcsokra!
Tengelyes tükrözésnél: $1 \to 1$, $2 \to 5$, $3 \to 4$, $4 \to 3$, $5 \to 2$; forgatásnál: $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 5$, $4 \to 1$, $5 \to 2$; így a kettő szorzatának eredménye: $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$, $4 \to 5$, $5 \to 4$. Ez a transzformáció éppen a 2. csúcson átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés.
A $2 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$, valamint $4 \leftrightarrow 5$ csúcsoknak azonos színűeknek kell lenniük. Mindegyik ciklus két színnel színezhető, a keresett színezések száma $2^3 = 8$.
322. *Első megoldás:* Tökéletes megoldás, ha mindig ugyanazt a számot, pl. 000-t próbáljuk ki (legrosszabb esetben 1000-szer).
Második megoldás: Az alábbi táblázat mutat egy lehetséges stratégiát.

sorszám	1	2	3	4	…	500	501	502	503	…	1000
feltevés a kódra	000	001	002	003	…	499	500	501	502	…	
próbálkozás	000	002	004	006	…	998	000	002	004	…	998

323. Ha az előző feladathoz hasonló stratégiát alkalmaznánk, észrevehetjük, hogy az 501. tipp 000 lenne, ami az első tipp ismétlése. Módosítsuk ezért pl. úgy a próbálkozásokat, hogy a 499 feltevéshez tartozó 998 tipp után az 501, majd 502 stb. feltevéssel élünk (táblázat).

sorszám	1	2	3	…	500	501	502	…	999
feltevés a kódra	000	001	002	…	499	501	502	…	999
próbálkozás	000	002	004	…	998	001	003	…	997

Ekkor azonban az utolsónak adódó 500 feltevéshez a 499 próbálkozás tartozna, amivel már korábban kísérleteztünk, tehát nem próbálható újra.
Általában is megmutatható, hogy nem mindig nyitható a páncélszekrény.
Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy megfelelő próbálkozássorozat. Ekkor a fentihez hasonló táblázatban az első sorban a 0, 1, 2, … , 999 számok szerepelnek; a második sorban szintén ezek a számok lesznek valamilyen sorrendben (nem lehet ismétlődés, hiszen minden kezdeti kódot ki kell próbálnunk); végül a harmadik sorban szintén ezek a számok állnak valamilyen sorrendben (ennek az az oka, hogy nem lehet kétszer azonos számmal próbálkozni). Mivel a harmadik sorban lévő számok a felettük levő két szám összegeként állnak elő, az összes számot összeadva az első két sor összegének meg kell adni a harmadik sorban lévő számok összegét, illetve 1000-es maradékát. Mivel $1 + 2 + \ldots + 999 = 499\,500$, a $499\,500 + 499\,500 = 499\,500$ egyenletnek kellene teljesülnie mod 1000 felett. Ez azonban lehetetlen, a bal oldal 1000-rel osztható, a jobb oldal nem (500 maradékot ad).
324. *a)* $6^5 = 7776$.

b) $6^5 - 5^5 = 4651$.

c) Minden dobás legalább 5-ös, és kell lennie 6-osnak is. A 6-os dobások száma alapján: $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 31$.

I

Más megoldási lehetőség: Mindegyik dobás kétféle lehet, ez $2^5 = 32$ eset; de ebből nem jó a csupa 5-ös.

d) A 11-es összeg 9-féleképpen állhat elő: (6, 2, 1, 1, 1), (5, 3, 1, 1, 1), (5, 2, 2, 1, 1), (4, 4, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1, 1), (4, 2, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 1, 1), (3, 3, 2, 2, 1), (3, 2, 2, 2, 2). Az egyes előállítások száma rendre $\binom{5}{3} \cdot 2$, $\binom{5}{3} \cdot 2$, $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{2} \cdot 3!$, $\binom{5}{3} \cdot 2$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}$, $\binom{5}{1}$, összesen 205 eset.

e) Az első négy dobás tetszőleges lehet, az utolsó 2-féle (attól függően, hogy az első négy dobott szám összege 3-mal osztva mennyi maradékot ad). $6^4 \cdot 2 = 2592$ eset.

f) Az utolsó szám 3-féle lehet; a középső számok tetszőlegesek; az első szám pedig 2-féle, attól függően, hogy a többi számjegy összegének mennyi a 3-as maradéka. $6^3 \cdot 3 \cdot 2 = 1296$.

g) A számjegyek összege lehet 9, 18 vagy 27.
A 9-es összeg előállításai: (5, 1, 1, 1, 1), (4, 2, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1, 1), (3, 2, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 1); ezekből páros számot rendre 0-, 8-, 0-, 12-, 4-féleképpen készíthetünk. Összesen 24 lehetőség.
A 18-as összeg előállításai: (6, 6, 4, 1, 1), (6, 6, 3, 2, 1), (6, 6, 2, 2, 2), (6, 5, 3, 1, 1), (6, 5, 2, 2, 1), (6, 4, 4, 3, 1), (6, 4, 4, 2, 2), (6, 4, 3, 3, 2), (6, 3, 3, 3, 3); ezekből páros számot rendre 18-, 36-, 10-, 12-, 36-, 36-, 30-, 36-, 1-féleképpen készíthetünk. Összesen 215 lehetőség.
A 27-es összeg előállításai: (6, 6, 6, 6, 3), (6, 6, 6, 5, 4), (6, 6, 5, 5, 5); ezekből páros számot rendre 4-, 16-, 4-féleképpen készíthetünk. Összesen 24 lehetőség.
18-cal osztható számot 24 + 215 + 24 = 263 esetben kapunk.

h) A lehetőségek száma: összesen 6^5; nincs 1-es: 5^5; nincs 6-os: 5^5; nincs 1-es és 6-os sem: 4^5. Innen 1-es és 6-os dobás is $6^5 - 2 \cdot 5^5 + 4^5 = 2550$ esetben van.

325. *a)* Az összes számból kivonjuk a csupa páratlan számjegyből állókat:
$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 5! = 27\,096$.

b) Az öt páratlan számjegyből alkotott számok száma 5! = 120.

c) Ha 25-tel kezdődik: $8 \cdot 7 \cdot 6$; ha nem, $3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$; összesen
$8 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 1218$ darab.

d) $\left(\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{0}\right) \cdot 5! = 126 \cdot 120 = 15\,120$. 1, 3 vagy 5 páratlan számjegyhez választjuk ki a párosakat, s ezeket minden lehetséges módon permutáljuk.

e) $\left(\binom{4}{4} \cdot \binom{5}{0} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{0} \cdot \binom{5}{4}\right) \cdot 5! = 66 \cdot 120 = 7920$. 0, 2 vagy 4 páros számjegyet választunk ki.

326. Csoportosítsuk pl. az 1-esek száma alapján a lehetséges számokat!
Az egyes típusok, az előállításuk lehetséges módjai és a belőlük készíthető négyjegyű számok száma rendre a következő lehet:

típus		előállítás	darabszám
a) 0, 1, 1, 1		1	3
b) x, 1, 1, 1	$x \in \{2, 3, 4, 5\}$	4	4
c) 0, 1, 1, x	$x \in \{2, 3, 4, 5\}$	4	9
d) 1, 1, 2, 2		1	6
e) 1, 1, x, y	$x \neq y;\ x, y \in \{2, 3, 4, 5\}$	6	12
f) 0, 1, 2, 2		1	9
g) 0, 1, x, y	$x \neq y; x, y \in \{2, 3, 4, 5\}$	6	18
h) 1, 2, 2, y	$y \in \{3, 4, 5\}$	3	12
i) 1, x, y, z	$x \neq y \neq z;\ x, y, z \in \{2, 3, 4, 5\}$	4	24
j) 0, 2, 2, y	$y \in \{3, 4, 5\}$	3	9
k) 0, x, y, z	$x \neq y \neq z;\ x, y, z \in \{2, 3, 4, 5\}$	4	18
l) 2, 2, x, y	$x \neq y;\ x, y \in \{3, 4, 5\}$	3	12
m) 2, 3, 4, 5		1	24

Összesen $1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 + 6 \cdot 12 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 1 \cdot 24 = 541$ négyjegyű szám készíthető.

327. $\dfrac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2!} + \dfrac{7 \cdot 8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 62\,160.$

328. *a)* A 0, 1, 1, 1, 1, 3, 4 számjegyekből $\dfrac{7!}{4!}$-féle szám készíthető (0 lehet elöl is); a jegyek elé, közé, illetve mögé $\dbinom{8}{3}$-féleképpen helyezhetjük el a 2-eseket; s kivonjuk azokat a számokat, amikor a 0 van elöl: $\dfrac{6!}{4!} \cdot \dbinom{7}{3}$.

Összesen $\dfrac{7!}{4!} \cdot \dbinom{8}{3} - \dfrac{6!}{4!} \cdot \dbinom{7}{3} = 10\,710.$

b) Az összesből kivonjuk azokat az eseteket, amikor a 3 és 4 egymás mellett van: $\dfrac{9 \cdot 9!}{4! \cdot 3!} - \dfrac{8 \cdot 8!}{4! \cdot 3!} \cdot 2 = 18\,200.$

c) A 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 számjegyekből az összes lehetséges számot elkészítjük, s attól függően, hogy hány 2-es van egymás mellett, elhelyezzük a 4-est. (Persze 0 nem lehet elöl.)
Ha a három 2-es egymás mellett van, a 4-est hat helyre tehetjük:
$\dfrac{7!}{4!} \cdot \dbinom{6}{1} - \dfrac{6!}{4!} \cdot \dbinom{5}{1} = 1110.$

I

Ha két 2-es van egymás mellett, a 4-est öt helyre tehetjük:

$$\frac{6!}{4!}\cdot 7\cdot 6\cdot\binom{5}{1}-\frac{5!}{4!}\cdot 6\cdot 5\cdot\binom{4}{1}=5700.$$

Ha nincs egymás mellett két 2-es, a 4-est négy helyre tehetjük:

$$\frac{6!}{4!}\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot\binom{4}{1}-\frac{5!}{4!}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\binom{3}{1}=23\,400.$$

Összesen 1110 + 5700 + 23 400 = 30 210 olyan tízjegyű szám készíthető, amelyben nincs egymás mellett 2-es és 4-es

329. 1. Ha a számban szerepel a 0: $9\cdot 10^4-9^5$ eset.

2. Nem szerepel 0, de van 5-ös: 9^5-8^5 lehetőség.

3. Csupa páratlan számjegy, de van 5-ös: 5^5-4^5 lehetőség.

Összesen: $(9\cdot 10^4-9^5)+(9^5-8^5)-(5^5-4^5)=55\,131$ lehetőség.

330. *a)* $9!\cdot 2=725\,760$; *b)* $8!\cdot 3!=241\,920$.

331. *a)* Az első négy helyiértéken az 1, 3, 7, 9 számok összes permutációja előfordul, így az egyes (legkisebb) helyiértéken 4! = 24-szer jelenik meg az 5-ös. Az 1–4 helyiértékek mindegyikén az egyes számjegyek 3! = 6-szor fordulnak elő, így a keresett összeg:
$6\cdot(1+3+7+9)\cdot 11\,110+24\cdot 5=1\,333\,320$.

b) Az egyes (legkisebb) helyiértéken $5^4=625$-ször jelenik meg az 5-ös. Az 1–4 helyiértékek mindegyikén az egyes számjegyek $5^3=125$-ször fordulnak elő, így a keresett összeg:
$125\cdot(1+3+5+7+9)\cdot 11\,110+625\cdot 5=34\,721\,875$.

332. A bolha összesen 9-szer ugrik jobbra és 3-szor balra, ezt $\binom{12}{3}$-féleképpen teheti meg. Ebből el kell hagynunk azokat az ugrássorozatokat, amelyekkel elérné a 8 vagy 9 pontot, hiszen ekkor eltűnne.
Jelöljük a jobbra és balra ugrásokat *J*-vel és *B*-vel!
Ha az első 8 ugrás *J*, akkor a befejező *J*, *B*, *B*, *B* ugrások bármely sorozata kivezet az intervallumból: 4 eset.
Ha az első 8 ugrás 7 darab *J* és egy *B*, akkor *J*, *J*-vel kell folytatni: 8 eset.
Összesen $\binom{12}{3}-4-8=208$ olyan ugrássorozat van, amelynek eredményeképp a 6 pontba kerül a bolha.

333. *Első megoldás:* Legyen a kocka alsó lapján az 1-es. Ekkor a 2-est kétféle helyre írhatjuk.
Ha a 2-es a felső lapon van, akkor a függőleges tengely mentén forgathatjuk úgy a kockát, hogy a 3-as az első lapra kerüljön, s ekkor a 4-es, 5-ös, 6-os számokat $3\cdot 2=6$-féleképpen írhatjuk fel. Ez 6 lehetőség.
Ha a 2-es az alsóval szomszédos lapra kerül, akkor a további számozást
$4\cdot 3\cdot 2=24$-féleképpen végezhetjük el.
Összesen 30-féle számozás lehetséges.

Második megoldás: Egy rögzített kocka lapjaira 6!-féleképpen írhatjuk fel a számokat. De az alsó lapra 6-féle számot forgathatunk, s minden ilyen helyzetben 4 függőleges tengelyű forgatás önmagába viszi a kockát. Összesen tehát $6 \cdot 4$ olyan mozgatás van, ami a kockát önmagával fedésbe hozza; a lényegesen különböző számozások száma $\frac{6!}{6 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$.

334. *a)* $\frac{4!}{4 \cdot 3} = 2$; *b)* $\frac{8!}{8 \cdot 3} = 1680$; *c)* $\frac{12!}{12 \cdot 5} = 3\,991\,680$;
d) $\frac{20!}{20 \cdot 3} \approx 4{,}05 \cdot 10^{16}$.

335. *a)* 511 vágás; *b)* 9 vágás (felezéses technikával).

336. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 < 128 = 2^7$, ezért elvileg elég 7 vágás. De biztosan marad az első vágás után egy legalább $5\times5\times3$-as, a második után egy legalább $5\times3\times3$-as, a harmadik után pedig egy legalább $3\times3\times3$-as összefüggő test. A $3\times3\times3$-as kockához már elvileg is szükség van 5 vágásra (ui. $2^4 = 16 < 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$), de gyakorlatilag 6 vágás kell: a középső $1\times1\times1$-es kocka minden lapját ki kell szabadítani. Meglepő, de összesen 9 vágásra van szükség; éppen úgy, mint a $8\times8\times8$-as kocka esetében.

337. *Első megoldás:* A kockának véges sok állapota van, ezért – esetleg nagyszámú tekerés után – előbb-utóbb ismétlődni fog valamelyik állapot.
Jelöljük az alapállapotot A-val, s tegyük fel, hogy egy B állapotból x számú forgatás után a B-vel megegyező B' állapotba jutunk. A kocka geometriai jellemzői miatt ez viszont azt jelenti, hogy a kocka bármely helyzetéből x számút forgatva, ugyanazt a helyzetet kapjuk vissza; vagyis ha az A kezdőállapotból végzünk x számú forgatást, akkor vissza kell jutnunk az A alapállapotba. (Azt is megkaptuk, hogy a kezdőállapot ismétlődik meg legelőször.)
Második megoldás: A kocka első és jobb oldali lapja lényegében háromfajta kis kockából áll elő. A lapközéppontú kis kockák minden forgatáskor megtartják helyüket. Az élközép kockákat együtt vizsgálva észrevehetjük, hogy az alapállapotból kiindulva, ha a feladatbeli *B1* és *J3* forgatásokból 14-et végzünk, visszakerülnek a helyükre. A csúcsokat alkotó kis kockákról ugyanez 18 forgatás után mondható el. A lapok középpontjai helyben maradnak; tehát ha az alapállapotból kiindulva a végzett forgatások száma 14 és 18 közös többszöröse, akkor a kocka ismét rendezetté válik. Legkevesebb 126 forgatás után áll vissza először az alapállapot.

338. *a)* $\binom{7}{3} = 35$; *b)* $\binom{4}{1} = 4$; *c)* $\binom{7}{3} - \binom{4}{1} = 31$.

339. *a)* $\binom{14}{7}$. 7–7 egységnyi lépést teszünk jobbra és felfelé is.

b) Ha egy 3 hosszú lépést teszünk jobbra, akkor $\binom{12}{7} \cdot \binom{5}{1}$-féle útvonal van; ha két darab 2 hosszú lépést teszünk jobbra, akkor $\binom{12}{7} \cdot \binom{5}{2}$-féle.

I

Ugyanennyit kapunk akkor is, ha a speciális lépéseket nem jobbra, hanem felfelé tesszük. Ha pedig az egyik 2 hosszú lépést jobbra, a másikat felfelé lépjük, az útvonalak száma $\binom{12}{5}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{2}{1}$. Összesen 57 024 különböző útvonal lehetséges.

340. Ha az egyes (utolsó) helyiértéken 0 van, akkor a számok összege $4!\cdot(1+2+3+4+5)\cdot 111\,110 = 39\,999\,600$.
Ha az egyes helyiértéken 5-ös van, akkor a számok összege
$4!\cdot(1+2+3+4)\cdot 100\,000 + 3\cdot 3!\cdot(1+2+3+4)\cdot 11\,110 + 4\cdot 4!\cdot 5 =$
$= 24\,000\,000 + 1\,999\,800 + 480 = 26\,000\,280$.
Összesen 65 999 880 a keresett összeg.

341. Béla a magasabb.
Tegyük fel, hogy Aladár az *i*. sorban és Béla a *j*. oszlopban van ($1\le i\le 6$ és $1\le j\le 5$). Ha ugyanabban a sorban állnak, Aladár az alacsonyabb; ha különböző sorban állnak, tekintsük az *i*. sor *j*. oszlopában álló Csabát. Aladárnál Csaba magasabb (azonos sorban állnak), Csabánál pedig Béla magasabb (azonos oszlopban állnak).

342. Mivel összesen 5 + 4 = 9 találat történt, a 8 pozíció egyikét mindkét tippeléskor eltalálta a játékos. Ez csak a 3-as lehet.

5	8	1	3	2	4	7	6
7	5	4	3	8	6	2	1
			3				

Minden más pozícióban a két tipp különböző, s mivel 4 + 3 = 7 további találat történt, a fenti táblázat első két sorában mindegyik szám pontosan egyszer van a saját helyén. Vagyis ha az első sorban négy további eltalált számot kijelölünk, a maradék három helyen lévő számok a második sorban ugyanezeken a helyeken találhatók, csak más sorrendben.
Az 5 – 7 – 2 – 8 és 1 – 4 – 6 számok egy-egy ciklust alkotnak, így a második sorban eltalált 3 további pálcika csak az 1, 4, 6 lehet. A pálcikák sorrendje:

5	8	4	3	2	6	7	1

343. *a) Első megoldás:*
$$\frac{p(p-1)}{2}+pq+\frac{q(q-1)}{2}=\frac{p^2-p+2pq+q^2-q}{2}=$$
$$=\frac{(p+q)^2-(p+q)}{2}=\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}\text{ valóban.}$$
Második megoldás: Tegyük fel, hogy *p* darab piros és *q* darab kék, egyforma méretű golyóból kiválasztunk kettőt. Ezt egyrészt $\binom{p+q}{2}$-féleképpen tehetjük meg; másrészt a kiválasztott piros golyók száma alapján is összeszámolhatjuk a lehetőségeket.

Ha két piros golyót választunk ki, ezt $\binom{p}{2}$-féleképpen; ha egyet, $\binom{p}{1}\binom{q}{1}$-féleképpen; ha pedig egyet sem, $\binom{q}{2}$-féleképpen tehetjük meg. A két oldal valóban egyenlő.

b) Az egyenlet mindkét oldalán kiszámoltuk, hogy hányféleképpen lehet p darab piros és q darab kék, egyforma méretű golyóból kiválasztunk három darabot.

344. Az előző feladat általánosítása: p darab piros és k darab kék, egyforma méretű golyóból kiválasztunk n darabot.

345. Az állítás a 304. feladat megoldásához fűzött megjegyzésből következik.