2013. március 1-3. EGMO edzőtábor

Polinom

1. Igazoljuk, hogy ha $P(x)$ egész együtthatós polinom, és $P(i) \not\equiv 0 \pmod{2013}$ $i = 1, \ldots 2013$-ra, akkor nincsen egész gyöke!

2. Van-e olyan harmadfokú egész együtthatós polinom, melyre $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$ teljesül valamely a, b, c pozitív egészekből álló hármasra?

3. Keressük meg az összes 1 főegyütthatós, 2-fokú, egész együtthatós $p(x)$ polinomot, melyhez létezik $q(x)$ egész együtthatós polinom, hogy $p(x)q(x)$ minden együtthatója ± 1 legyen.

4. Van -e olyan 2013-fokú egész együtthatós polinom, ami 2013 különböző egész helyen ± 1 értéket vesz fel, és felírható két kisebb fokú egész együtthatós polinom szorzatára?

5. $P(x)$ és $Q(x)$ egész együtthatós polinomokra fennáll, hogy minden pozitív n egészre $P(n) \mid Q(n)$. Igazoljuk, hogy létezik $g(x)$ polinom, melyre $Q(x) = P(x)g(x)$.

6. $P(x) = (x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2 + 1$ polinom nem írható fel két valós együtthatós polinom szorzataként.

Kombinatorika

1. Egy fagylatárus 6-féle fagyit árul. Egyik nap megszámolta, hogy bármely két fagylaltjából a fagylaltozóinak több mint 40 százaléka kért. Senki nem volt viszont, aki az összes fagyit kipróbálta volna.
a) Igazoljuk, hogy volt vevője, aki a hatból ötféle fajtából is kért!
b) Igazoljuk, hogy több ilyen vevője is volt!

2. Van egy $n \geq 4$-elemű kavics-kupacunk. Két játékos a következőt játssza. Felváltva lépnek. A soron következő játékos kiválaszt egy legalább 4-elemű kavicskupacot, és két (nemüres) részre bontja. Aki nem tud lépni, veszít. Milyen n értékre van nyerő stratégiája az első játékosnak?

Geometria (végén kettősviszonnyal)

1. ABC hegyesszögű háromszög, oldalfelező pontjai A', B', C' (a megfelelő csúccsal szemköztesen). Tekintsük azt a három kört, melyek középpontjai A', B', C', és átmennek a háromszög magasságpontján. A körök a nekik megfelelő oldalt 2-2 pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy egy körre esik ez a 6 pont.

2. ABCD húrnégyszögben AD és BC nem párhuzamosak. Az A-n és D-n átmenő, BC oldalt érintő K_1 kör érintési pontja P, a B-n és C-n átmenő, AD-t érintő K_2 kör érintési pontja Q. Igazoljuk, hogy K_1 és K_2 közös pontjain átmenő egyenes pontosan akkor felezi PQ-t, ha AB és CD párhuzamos.

3. Egy ABC háromszög oldalai fölé írt 120°-os látókör oldalaktól legtávolabbi pontjai A', B', C'. Igazoljuk hogy e három pont szabályos háromszöget feszít.

4. ABC egyenlő szárú háromszög, B-nél és C-nél 80°-os szöggel. A BD és CE Ceva-szakaszok e két szöget rendre $60 + 20$ ill. $50 + 30$ arányban osztják úgy, hogy a BC alapon nyugszik a két nagyobbik szög. Mekkora az $EDB\angle$?

5. AB, CD, XY egy kör húrjai, közös pontjuk AB felezőpontja, F. DX és CY szakaszok metszik az AB szakaszt. Igazoljuk, hogy a metszéspontok F-től mért távolsága ugyanannyi.

6. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőpontja D, a háromszög beírt köre BC szárat E pontban érinti. A ponton át húzott szelő a beírt kört F és G pontban érinti. Igazolandó, hogy ezeken át E-ből egyenest húzva az AB alap egyeneséből D-re szimmetrikus pontpárat metszünk ki.

Számelmélet

1. Igazoljuk, hogy ha 1-től N-ig n kupacba osztottuk a számokat, és $N > 4n!$, akkor lesz egy kupac, ahol megoldható az $x + y = z$ egyenlet megfelelő kupacbeli elemek választásával.

2. Igazoljuk a Dirichlet tétel felhasználása nélkül, hogy végtelen sok olyan prím van, ami $6k+1$ alakú.

3. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív egészekre fennáll az

$$a^b - b^a = 1008$$

egyenlőség, akkor a és b egyező maradékot adnak 1008-cal osztva.

4. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n van, melyre n^2 osztja $2^n + 3^n$ értékét.

5. Minden pozitív egész n-re határozzuk meg az $\{1, 2, \dots n\}$ halmaz olyan $(a_1, a_2, \dots a_n)$ permutációinak számát, ahol minden n-nél nem nagyobb pozitív egész k-ra k osztója $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$-nak.

Egyenlőtlenség, Fv-egyenlet

1. Keressük meg az összes $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre $f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))$ fennáll.

2. $$\sqrt[k]{x(x-1)\dots(x-k+1)} < \sqrt[p]{(x-c)(x-c-1)\dots(x-c-p+1)},$$
ahol $c = \frac{k-p}{2}$, $k > p > 0$ egészek, $x > k-1$, és
a) $k - p$ páros
b) $k - p$ páratlan.