Feladatok egymásnak

2014. február 21.

Ági

1. Egy téglalap alakú négyzetháló minden négyzete vagy fehér, vagy fekete. A következő szabály szerint változtatjuk a színezést: az összes négyzetet egyszerre megvizsgáljuk, és ha egy négyzetnek páros számú fekete szomszédja van, akkor fehérre változtatjuk, ha páratlan számú fekete szomszédja van, akkor feketére változtatjuk.
a) Bizonyítsuk be, ha az alakzat nem változik, akkor a fekete négyzetek száma páros.
b) Bizonyítsuk be, ha egy alakzatból kiindulva átalakítások sorozatával visszajutunk az eredeti alakzathoz, akkor az átalakítás-sorozat (ciklus) során előforduló táblázatokban a fekete négyzetek összes száma páros.

2. Legyen A, B, C, D egy egyenes négy különböző pontja, amelyek ebben a sorrendben fekszenek az egyenesen. Az AC, ill. BD átmérők fölé rajzolt körök metszéspontja a BC egyenessel legyen Z, legyen továbbá P az XY egyenes egy Z-től különböző pontja. A CP egyenes metszéspontjai az AC átmérőjű körrel legyenek B és N. Bizonyítsuk be, hogy az AM, DN és XY egyenesek egy ponton mennek át.

3. A $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ számokra fent áll a következő egyenlőség: $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$
Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$

Eszter

4. Legyen $a, b, c > 0$ valós számok, $abc = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{ab}{ab+a^5+b^5} + \frac{ac}{ac+a^5+c^5} + \frac{bc}{bc+b^5+c^5} \leq 1$.

5. Egy n hosszú, pozitív egész számokból álló sorozat 'jó', ha
i) Minden $k \geq 2$-re ha k szerepel a sorozatban akkor $k-1$ is
ii) $k-1$ első előfordulása k utolsó előfordulása előtt van.
Hány n hosszú 'jó' sorozat van?

6. Legyen AB egy olyan húr a k körben, amely nem átmérő és legyen M AB felezőpontja. C egy változó pont, amely k-n fut (C nem A és nem B), P pedig legyen az a pont, ahol a CAM kör A-hoz húzott érintője metszi a CBM kör B-hez húzott érintőjét.
Mutassuk meg, hogy a CP egyenes mindig áthalad egy fix ponton, amikor C fut a k körön.

Panna

7. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok kiszínezhetők 2008 színnel úgy, hogy mindegyik színt felhasználjuk, és valahányszor $3a + 5b = 7c$, akkor a, b és c között van két ugyanolyan színű.

8. Ha egy négyzetet hegyesszögű háromszögekre darabolunk, legalább hány rész keletkezik?

9. Adott négy kör,k_1, k_2, k_3, k_4 úgy, hogy k_1 és k_3 érintik egymást egy P pontban, és k_2 és k_4 is érintik egymást szintén P -ben.Legyenek k_1 és k_2, k_2 és k_3, k_3 és k_4, k_4 és k_1 P-től különböző metszéspontjai rendre A, B, C, és D. Igazoljuk hogy

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Szuzina

10. Oldjuk meg! $a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a + b = 8, \quad ab + c + d = 23, \quad ad + bc = 28, \quad cd = 12.$

11. Legyen t egy tetszőleges háromszög. Színezzük ki a sík pontjait tetszőlegesen két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan háromszög, amelynek csúcsai azonos színűek és a háromszög hasonló az adott háromszöghöz!

12. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$, akkor fennáll az

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

egyenlőtlenség!