Geometria, körök, hasonlóságok - megoldásokkal

2014. február 21-23.

Bemelegítés

1. Az ABC háromszögben M a magasságpont, O a köréírt kör kp-ja, F_A a BC oldal felezőpontja. Miként fejezhető ki a $\frac{AM}{OF_A}$ arány?

megoldás: 1 : 2. Könnyű számolás is, Feuerbach-körhöz is kapcsolódik: nagyítás S súlypontból $\lambda = -2$ arányban!

2. Adott az XYZW paralelogramma. Legyen P és Q az XY és YZ oldalon felvéve úgy hogy $XP = ZQ$. Igazoljuk, hogy az XQ és ZP által kimetszett S pont az $XWZ\angle$ szögfelezőjére esik.

Alkalmazzunk hasonlóságot, és a szögfelezőtétel megfordítását!

3. Az ABC háromszögben a beírt kör D-ben érinti a BC oldalt, legyen T akör D-vel szemköztes pontja, és X a BC és az AT egyenesek metszete. Igazoljuk, hogy $BX = DC$.

Megoldás: ekvivalens, hogy X a hozzáírt kör érintési pontja: egy A kp-ú nagyításból adódik az állítás, valamint az érintő szakaszok kiszámolásából.

4. Igazoljuk, hogy ha a hegyesszögű ABC háromszögben a köréírt kör középpontja O és sugara R, továbbá T_A, T_B, T_C az A-ból, B-ből ill. C-ből induló magasságok talppontja, és a $T_AT_BT_C$ talpponti háromszög kerülete k, akkor

$$t_{ABC} = \frac{Rk}{2}.$$

Megoldás: könnyen belátható, hogy $AO \perp T_BT_C$. A háromszöget 3 merőleges átlójú húrnégyszögre bontjuk O és a talppontok segítségével, és kész.

5. ABCD húrnégyszög. Ha AD-re A-ban és BC-re C-ben merőlegest állítunk, M-et kapjuk, ha AD-re D-ben és BC-re B-ben merőlegest állítunk, N-et kapjuk. Igazoljuk hogy ha E pont a metszéspontja AD-nek és BC-nek, akkor $\angle DEN = \angle CEM$

Könnyű szögszámolás ha felfedezzük az összes húrnégyszöget az ábrán, de figyelni kell, mennyiben függünk az ábrától!

6. Adott egy k kör és egy azt érintő e egyenesen M pont. Adjuk meg azon P pontok mértani helyét, melyhez létezik PQR háromszög, amire teljesül, hogy a k a beírt köre, és az e egyenesen fekvő QR szakasznak M a felezőpontja.

a 3. feladatot használjuk, vegyük észre, hogy a feladatbeli X (mint a kör érintési pontjának M-re való tükörképe) és T (az érintési ponttal átellenes pont a körön) rögzített; és minden jó pont az általuk meghatározott egyenesre esik. Figyelem! Hozzá kell tenni még, hogy (i) ezen egyenesen a T-n "túli" nyílt félegyenes minden pontja jó; (ii) más pont nem jó.

7. Az ABCD húrtrapézban $AB\|CD$. A BCD háromszög beírt köre a CD oldalt E-ben érinti, továbbá F a $DAC\angle$ szögfelezőjének azon pontja, melyre $EF \perp CD$. Igazoljuk, hogy ha CD egyenesének C-től különböző metszéspontha AFC háromszög körülírt körével G, akkor AFG egyenlő szárú.

Azt kell észrevenni, hogy F éppen az ACD háromszög hozzáírt köre középpontja.

8. Vegyük az ABC háromszög hozzáírt köreit, és érintési pontjait az oldalakon: A_1, B_1, C_1. Igazoljuk, hogy AA_1, BB_1, CC_1 egy ponton mennek át (N) - Ő a Nagel pont. Mekkora az $\frac{AN}{NA_1}$ arány?

Ceva tétel, Menelaosz-tétel. A válasz $a/(s-a)$.

9. AZ ABC háromszögben legyenek F_A, F_B, F_C rendre az oldalfelezőpontok. Ezek által meghatározott egyenesek 4 egybevágó részre vágják az $ABC\Delta$-et. A külső háromba írt kör érintse a belső $F_AF_BF_C$ háromszög oldalait rendre a P_A, P_B, P_C pontokban. Lássuk be hogy F_AP_A, F_BP_B, F_CP_C egyenesek egy ponton mennek át!

egyenlő szárú szakaszok észrevétele: a pont a belső △ Nagel-pontja lesz.

10. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög beírt körének középpontja I, akkor az F_A, F_B, F_C felezőpontokkal definiált háromszögben I a Nagel-pont.

Használjuk a 2. feladatot: ebből látszk hogy minden szögfelezőn rajta van a középvonal-háromszög Nagel-pontja.

11. Igazoljuk, hogy minden háromszögben A Nagel-pont N, a súlypont S és a beírt kör középpontja (I) egy egyenesre esnek.

S-ből $\lambda = -2$ arányú nagyítást végrehajtva I (ami a középvonal-háromszög Nagel-pontja), a háromszög Nagel-pontjába megy.