

# Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

## 1. Kombinatorika a síkon / kör részgráfok

2018 Szeptember 12.

(1)  $G$  legyen egyszerű 4-reguláris síkgráf.

(a) Mutassuk meg hogy az élek irányíthatók úgy, hogy minden pontnak két belépő és két kilépő éle legyen és ez a két pár elválasztja egymást a síkbeli beágyazásban!

(b) Mutassuk meg, hogy kékre és pirosra ugyanakkor nem színezhajjuk meg az éleket úgy, hogy a minden csúcsban két piros és két kék él találkozzon és ezen párok mind elválasszák egymást a beágyazásban!

(2) Legyen  $\mathcal{L}$  a síkon egy egyenes-halmaz, mely nem tartalmaz párhuzamos egyeneseket, és nem is mind egy pontra illeszkedőek. Igazoljuk, hogy van olyan pont, ami pontosan két egyenes metszéspontja.

(2+) Vegyük észre, hogy ez olyasmi állítás, mint a Sylvester-Gallai tétel:  $n \geq 3$   $\mathbb{R}^2$ -beli nem egy egyenesre eső pont halmaza,  $\mathcal{P}$  meghatároz legalább  $t(n) \geq 1$  olyan síkbeli egyenest, amin pontosan kettő  $\mathcal{P}$ -beli pont van. Adjunk jobb alsó és felső becslést a biztosan létrejövő 2-pontú egyenesek  $t(n)$  számára!

3) Mi a helyzet a térben?

(A) Ha  $\mathcal{P}$   $\mathbb{R}^3$ -beli, és nincsenek egy síkban a pontok, van-e olyan  $S$  sík, amin pontosan 3  $\mathcal{P}$ -beli pont van, melyek nem kollineárisak?

4) Színezett Sylvester-Gallai.

Legyen a síkon adva egy  $n$  pontú  $\mathcal{P}$  ponthalmaz, nem egy egyenesre eső pontokkal. Minden pont kék vagy piros. Bizonyítsuk hogy van egyszínű egyenes: olyan ami minimum 2 pontú és minden pontja azonos színű.

I) Egy  $n$  csúcsú  $n$  élű gráfban biztosan van kör. Hány él jelenléte garantál 2 éldiszjunkt kört?

II) Adjunk becslést egy  $n$  csúcsú  $G = G(V, E)$  gráf azon  $e(G)$  élszámára  $n$  és  $k$  függvényében melyből következik hogy  $G$  tartalmaz egy kört ami legalább  $k + 1$  hosszú!

III) a) Legfeljebb hány 3 hosszú irányított kört tartalmaz egy tournament?

b) Legalább hány 3 hosszú irányított kört tartalmaz egy tournament, ha erősen összefüggő, vagyis bármely csúcsból bármely másik csúcsába eljuthatunk irányított úton? Vizsgáljuk meg, éles-e a becslésünk!

IV) Igazoljuk, hogy ha egy  $G = G(V, E)$   $n$ -csúcsú gráf nem tartalmaz  $\leq 2k$  hosszúságú kört, akkor az élei száma nem haladhatja meg a  $C_k n^{1+1/k}$  értéket, valamely  $n$ -től független  $C_k$  konstans mellett.