Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

2. Irányított gráfok

2018 Szeptember 19.

Legyen D egy irányított gráf $V = \{v_1, \dots v_n\}$ csúcshalmazon. D **erősen összefüggő**, ha bármely két csúcsa között mindkét irányban vezet irányított út. A teljes irányított gráfot **turnamentnek**, az olyan irányított fát, amelyben egy csúcsot, a **gyökeret** leszámítva minden csúcsába egy él vezet, **fenyőnek** hívjuk.

1) Lássuk be, hogy egy D irányított gráf erős összefüggősége ekvivalens azzal, hogy minden nemüres csúcshalmazába vezet él befelé, és onnan kifelé is.

2) Irányítatlan gráfban az összefüggő komponensek meghatározása egyszerű, és gyorsan is megvalósítható (az élszám függvényében). Tegyük fel, hogy adott egy irányított gráfunk n csúcson. Hogyan határoznánk meg az erősen összefüggő komponenseit?

3) Ha D erősen összefüggő, akkor a következő két feltétel ekvivalens:

- D-ben van páros hosszú irányított kör;
- kiszínezhetőek a csúcsai 2 színnel úgy, hogy minden pontot irányított él köt (valamelyik) ellentétes színű ponthoz.

4) Állítás: Egy $2n$ csúcsú turnamentbe minden olyan fenyő beágyazható, amelynek csúcsszáma x. Mennyi lehet x maximuma?

5) Lássuk be, hogy ha D egy erősen összefüggő turnament, akkor van benne irányított Hamilton-kör is!

6) Bizonyítsuk be, hogy irányított Hamilton-kört akkor is találunk egy n-csúcsú erősen összefüggő irányított gráfban, ha a $d^+(v) + d^-(v)$ be- és kifok összeg minden v csúcsra legalább n.

Megj: Vegyük észre, hogy ez az állítás kedvenc irányítatlan gráfra vonatkozó Dirac tételünket is igazolja.

7) Próbáljuk meg javítani az előző eredményt, vagy mondjunk olyan gyengébb feltételt, amiből már nem következik az irányított Hamilton-kör létezése.

8)