Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Hipergráfok

2018 Október 6.

Jelölje $\mathcal{F}$ az $A_1, A_2, \ldots A_m$ halmazok (hiperélek) családját, ahol $A_i \subseteq H$, $|H| = n$. Ha $|A_i| = |A_j| (= r)$ $\forall i, j$-re, akkor azt mondjuk hogy a halmazrendszer (hipergráf) **(r-)uniform**. Ha $|A_i \cap A_j| \neq \emptyset$ $\forall i, j$-re akkor azt mondjuk hogy **metsző**. Az alábbiakban mindig feltesszük, hogy az A_i halmazok különbözőek.

1) Valamely $\mathcal{F}$ (nem feltétlen uniform) hipergráf élei vagy tartalmazzák egymást, vagy metszik. Legfeljebb hány éle lehet a hipergráfnak?

2) A fenti r-uniform $\mathcal{F}$ hipergráf éleinek páronként legfeljebb k közös eleme van. Igazoljuk, hogy

$$n \geq \frac{r^2 m}{r + (m-1)k}.$$

3) Az $\mathcal{F}$ hipergráf r-uniform. Igazoljuk, hogyha $m \leq 2^{r-1}$, akkor csúcsai kiszínezhetőek két színnel úgy, hogy nincs egyszínű éle.

4) Adott egy r-uniform hipergráfunk. Mutassuk meg, hogy csúcsai r osztályba sorolhatóak úgy, hogy az élek közül legalább $\frac{r!}{r^r}|E|$ legyen transzverzális, tehát mind az r kupacba belemetsző.

5) a) Konstruáljunk olyan r-uniform $\mathcal{F}$ metsző hipergráfot, ami nem 2-színezhető.
b) Konstruáljunk olyat, aminek pontszáma $C \cdot r^2$, nem 2-színezhető, és relatívekevés éle van: legfeljebb $c \cdot r^2 2^r$.

6) Igazoljuk, hogy ha az $\mathcal{F}$ metsző hipergráf r-uniform és 3 színnel színezhető, akkor $m \leq r^r$.