Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Napraforgó

2020. Október 13.

Definíció. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer **napraforgó**t alkot (másutt: **Delta-rendszert**), ha létezik olyan Z halmaz, hogy bármely kettő $X, Y \in \mathcal{F}$ halmazra $X \cap Y = Z$, de $Z \notin \mathcal{F}$.
Z ekkor a napraforgó közepe, az $X \setminus Z$ halmazok a szirmok $X \in \mathcal{F}$.

1) Tetszőleges r-uniform halmazrendszer tartalmaz napraforgót k szirommal, amennyiben a halmazrendszer mérete legalább

$$m > r!(k-1)^r.$$

2) Mutassuk meg, hogy az előző állítás $m = (k-1)^r$ mellett már biztosan nem igaz.

(**Napraforgó-sejtés**: ha k fix, akkor a felső becslés távolról sem éles, ugyanis C^r-rel lehet felülről becsülni az $r!$ szorzótényező helyett a megfelelő tényezőt.)

Állítás. Ha egy r-uniform $\mathcal{F}$ halmazrendszerről csak annyit teszünk fel, hogy minden halmazpár metszete egyforma ($Delta$), akkor $|\mathcal{F}| > r^2 - r + 1$-ből az is következik, hogy $\mathcal{F}$ napraforgó.

3) Igazoljuk, hogy a fenti állítás éles!

4) Tegyük fel, hogy k-ra és r-re teljesül, hogy $n - k + 1 < r < n$. Igazoljuk, hogy az n elemű alaphalz r-elemű részhalmazai nem fognak k-szirmú napraforgót tartalmazni.