Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

vegyes extremális példák

2020. Dec. 1.

Probléma.
Legyen M egy n pontú síkbeli ponthalmaz. Mi lehet az M-beli ponthármasok által meghatározott legnagyobb szög ϕ_n-nel jelölt minimuma?

Megjegyzés.
Ha $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, akkor ez $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$, ami a szabályos sokszögeken vétetik fel.

1) Igazoljuk, hogy nem igaz, hogy $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$ volna a minimum általában.

2) Lássuk be, hogy az alábbi érték alsó korlát a minimumra:

$$\left(1 - \frac{2}{\log_4 n}\right)\pi \leq \phi_n$$

3) Próbáljunk minél jobb becslést adni a ϕ_n-re.

Theorem 1 (Szekeres)**.**

- *Ha* $n > 2^k$*, akkor* $\phi_n > \left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi$
- *Ha* $n = 2^k$*, akkor* $\phi_n < \left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi + \varepsilon$*,* $\forall \varepsilon > 0$.

A sík kromatikus száma (Hadwiger-Nelson) a legkisebb k, melyre igaz hogy a sík pontjai kiszínezhetőek k színnel úgy hogy nincs monokromatikus egységtávolság. Könnyű: a kromatikus szám legalább 4. Nem nehéz: legfeljebb 7. Friss eredmény ('18) de Grey: legalább 5.

4) Adjunk minél jobb alsó becslést a tér kromatikus számára!

5) Adjunk minél jobb felső becslést a tér kromatikus számára! Mondjuk minél jobb felső becslést általános d dimenzióban is!

6) Mutassuk meg, hogy a sík pontjait ki tudjuk színezni két színnel, pirosra és kékre úgy, hogy nincsen monokromatikus csúcsú egységoldalú háromszögünk.

7) Színezzük a sík pontjait pirosra és kékre. Mutassuk meg, hogyha nincs piros pontpár egységtávolságra, akkor tetszőleges T háromszögre igaz, hogy van vele egybevágó háromszög, melynek minden csúcsa kék.