Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Extremal problems

2020. february 26.

1) Megadható-e a természetes számokon olyan $\mathcal{A}$ halmazrendszer, amelyre igaz, hogy bármely két elemének közös metszete véges, de a halmazrendszer számossága nem megszámlálható?

2) Van egy $\mathcal{A}$ halmazrendszerünk n halmazzal. Milyen $f(n)$ számosságú $\mathcal{B}$ halmazrendszer választható közülük ki biztosan úgy, hogy semelyik $B \in \mathcal{B}$ ne állhasson elő két további $\mathcal{B}$-beli halmaz uniójaként?

3) Adva van egy teljes r-partíciós gráf $K_{a_1,a_2,\dots a_r}$. Tekintsük az egyes partícióosztály-párok közötti élsűrűségeket. Igazoljuk, hogy ha néhány él törlésével a kapott G gráf K_r-mentes lett, akkor G megfelelő osztályai között az élsűrűségek összege $\binom{n}{2}$-ről legalább 1-gyel csökkent.

4) Adva van egy G r-partíciós gráf, melynek osztályai között az élsűrűségek $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_N$, ahol $N = \binom{r}{2}$. Két csúcsot lényegesen különbözőnek mondunk, ha szomszédhalmazaik nem identikusak. Igazoljuk, hogy létezik olyan G' r-partíciós gráf, melynek osztályai között az élsűrűségek sorrendben ugyanígy legalább $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_N$ nagyságúak, ráadásul minden osztályban csak max. $r-1$-féle lényegesen különböző pont van.

5) (Sejtés) Adva egy G $m+n$-partíciós gráf $A_1, \dots A_m$ ill. $B_1 \dots B_n$ osztályokkal. Tudjuk, hogy $E(\cup_i A_i) = \emptyset = E(\cup_j B_j)$, vagyis egy páros gráf felfújtjáról van szó. Igazoljuk, hogy ha minden A_i, B_j pár között az élsűrűség nagyobb mint $1 - \frac{1}{n+m-1}$, akkor G tartalmaz kifeszített $K_{a,b}$ részgráfot, vagyis olyat, hogy minden osztályból egy reprezentáns feszíti a teljes páros gráfot.