Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Intervallumok

2020. márc. 25.

1) Van egy $\mathcal{A}$ halmazrendszerünk n halmazzal. Milyen $f(n)$ számosságú $\mathcal{B}$ halmazrendszer választható közülük ki biztosan úgy, hogy semelyik $B \in \mathcal{B}$ ne állhasson elő két további $\mathcal{B}$-beli halmaz uniójaként?
(a) Igazoljuk, hogy $f(n) \geq \sqrt{n}$.
(b) Élesítsünk az alsó korláton, $f(n) \geq C \cdot \sqrt{n}$-et bizonyítva valamely $C > 1$-re!
(c) Bizonyítsuk be, hogy $f(n) \leq 2\sqrt{n}$. (Ötlet: használjunk intervallumokat a számegyenesről.)

Megj: A probléma az '50-es évek cégéről van; b),c) eredményeket először Erdős, Komlós és Shelah igazolták ('69, '72), a pontos eredmény friss: Fox, Lee, Sudakov, 2012: $f(n) = \lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor - 1$.

Def. G intervallumgráf, ha létezik reprezentációja egyenesen felvett intervallumokkal úgy, hogy a gráfcsúcsok megfelelnek egy-egy intervallumnak, két gráfcsúcs akkor van összekötve ha az intervallumok metszőek.

2) Igazoljuk, hogy az intervallumgráfok perfektek, vagyis $w = \chi$ igaz minden feszített részgráfra.

3) Minden $k \in \mathbb{N}^{+}$-ra létezik *a körön* olyan nyílt intervallum-hipergráf melynek a metszetgráfjának max klikkmérete $\omega = k$, míg színezési száma $\lfloor \frac{3k-1}{2} \rfloor$.

Megj: Ez éles Karapetian tétele szerint ('80).

4) Adjunk jellemzést az intervallumgráfokra részgráfjai és feszített részgráfjai segítségével! (szükséges, elégséges feltételek)

Def (Boxicity). Egy $G = (V, E)$ gráf boxicity-je, $Box(G)$ az a legkisebb n egész szám, amire teljesül, hogy G előáll, mint $\mathbb{R}^n$-beli téglák metszetgráfja, ahol a téglák élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel).

Megj: A def-ből adódan $Box(G) = 1 \leftrightarrow G$ intervallumgráf. Azonban $Box(G) \leq 2$ teljesül-e, már NP-teljes feladat.

5) Igazoljuk, hogy a Boxicity jól definiált, és $Box(G(V, E)) \leq n$.

6) Mutassunk kapcsolatot a boxicity és a max fokszám $\Delta(G)$ között.

7) Keresünk alsó-felső korlátot a $T_{2n,n}$ Turán-gráf boxicity-jére.