

Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Korábbi Schweitzer-példák

2020. ápr. 8.

1. Legyen n pozitív egész. Legyen \mathcal{F} egy olyan halmazrendszer, amely egy n elemű X halmaz összes részhalmazának több, mint a felét tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy \mathcal{F} -ből mindig kiválasztható $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ halmaz úgy, hogy ezek együtt szeparálják X elemeit, vagyis X bármely két különböző eleméhez van olyan kiválasztott halmaz, amely a kettő közül pontosan egyet tartalmaz.

2. Legyen $k \geq 1$ és legyenek I_1, \dots, I_k a $[0, 1]$ intervallum el nem fajuló részintervallumai. Bizonyítsuk, hogy

$$\sum \frac{1}{|I_i \cup I_j|} \geq k^2,$$

ahol az összegzés az olyan (i, j) indexpárookra vonatkozik, ahol I_i és I_j nem diszjunkt.

3. A sík $4n + 5$, hármanként nem kollineáris pontját két színnel kiszínezzük. Igazoljuk, hogy lesz n üres (azaz, belsejében színes pontot nem tartalmazó) háromszög, amelyeknek a belseje páronként diszjunkt és amelyeknek az összes csúcsa mind egyszínű.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy k -kromatikus gráf éleit tetszőlegesen két színnel színezve van olyan k pontú részfa, melynek élei ugyanolyan színűek.

5. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G) + 1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.