

# Kromatikus polinom

1. Adott  $G = (V, E)$  gráf és legyen  $\lambda$  pozitív egész. Legyen  $\text{ch}(G, \lambda)$  ahányféleképpen  $G$  gráf csúcsait ki lehet színezni  $\lambda$  színnel, hogy semely két összekötött csúcs ne legyen azonos színű. Mutasd meg, hogy

$$\text{ch}(G, \lambda) = \sum_{T \subseteq E(G)} (-1)^{|T|} \lambda^{c(T)}$$

ahol  $c(T)$  a  $G_T = (V(G), T)$  gráf összefüggő komponenseinek száma.

2. Legyen  $e \in E(G)$ . Legyen  $\text{ch}(G, \lambda)$  ahányféleképpen  $G$  gráf csúcsait ki lehet színezni  $\lambda$  színnel, hogy semely két összekötött csúcs ne legyen azonos színű. Mutasd meg, hogy

$$\text{ch}(G, \lambda) = \text{ch}(G - e, \lambda) - \text{ch}(G/e, \lambda).$$

3. Legyen  $\lambda^k = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)$  leszálló faktoriális. Legyen  $b_k$  ahányféleképpen fel lehet bontani  $G$  gráfot  $k$  darab diszjunkt független halmaz uniójára. Mutasd meg, hogy

$$\text{ch}(G, \lambda) = \sum_{k=1}^n b_k \lambda^k.$$

4. Legyen

$$\text{ch}(G, \lambda) = \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_1 \lambda + (-1)^n a_0.$$

Mutasd meg, hogy  $a_i \geq 0$  és  $a_0 = 0$ . Mi a jelentése  $a_{n-1}$ -nek?

5. Mutasd meg, hogy ha  $G$  összefüggő akkor  $a_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) és  $a_{n-1} < a_{n-2} < \dots < a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ .

6. Mi a jelentése a 0 és az 1 gyökök multiplicitásának a  $\text{ch}(G, \lambda)$  polinomban?

7. Mutasd meg, hogy  $\text{ch}(G, \lambda)$ -nak nincs gyöke a  $(0, 1)$  intervallumban.

8. Bizonyítsd be, hogy  $|\text{ch}(G, -1)|$  a  $G$  körmentes irányításainak a száma.

9. Legyen  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  és nevezzünk egy útat törött körnek ha az út két végpontját összekötő él benne van a  $G$  gráfban és indexe nagyobb, mint az útban szereplő élek indexei. Legyen  $c_k$  ahányféleképpen ki lehet választani a gráf  $k$  élét, hogy ne tartalmazzon törött kört. Bizonyítsd be, hogy  $c_k = a_{n-k}$  éppen a kromatikus polinom együtthatója.