2013. március 2–3.

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre
$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$
igaz minden valós x-re. Határozzuk meg $f(0)$-t.

2. Legyen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ olyan függvény, hogy tetszőleges x, y egészekre
$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$
Bizonyítsuk be, hogy f korlátos.

3. Határozzuk meg, hogy mely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül az alábbi egyenlőség tetszőleges x, y számokra.
$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

4. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre
$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy))$$
teljesül minden x, y valós számra.

---

5. Legyenek n és k pozitív egészek. Van nk tárgy és k doboz, mindegyikbe n tárgy fér bele. Minden tárgy k különböző szín valamelyikére van festve. Bizonyítsuk be, hogy be lehet tenni a tárgyakat a dobozokba úgy, hogy minden dobozban legfeljebb két színből jussanak tárgyak.

6. Egy harminctagú klubban mindenkinek van egy-egy kalapja. Egyszer csak mindenki odaadja a kalapját valaki másnak (egy emberhez több kalap is kerülhet). Bizonyítsuk be, hogy van olyan tízfős csoport, amiben senki nem kapott a csoport egyetlen másik tagjától sem kalapot.

7. Tekintsük az alábbi végtelen irányítatlan gráfot. Az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok mindegyike véges sok csúcsot tartalmaz. Csak szomszédos sorszámú halmazokban lévő csúcsok lehetnek élekkel összekötve (tehát például A_2 csúcsai csak A_1-beliekkel és A_3-beliekkel lehetnek összekötve; A_2-n belül sincsenek élek). Tegyük fel, hogy minden n-re érvényes, hogy A_1-ből A_n-be vezet út, azaz olyan élsorozat, melynek i. tagja egy A_i-beli és egy A_{i+1}-beli csúcsot köt össze. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van végtelen hosszú út (azaz A_1-ből elindulva végtelen sok lépést tehetünk egymáshoz illeszkedő éleken anélkül, hogy egy csúcsba többször visszatérnénk).

8. Egy $n \cdot n$-es táblázat mezőibe nem negatív egész számokat írtunk úgy, hogy ha valamely sor és oszlop kereszteződésében nulla áll, akkor ebbena sorban és oszlopban a számok összege legalább n. Mutassuk meg, hogy a táblázatban lévő számok összege legalább $n^2/2$.

---

9. Egy 500 tagú vállalat dolgozói $2n$ nyelv közül beszélnek néhányat, mindenki legalább n nyelvet beszél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható 14 nyelv úgy, hogy minden dolgozó a 14 nyelv közül legalább egyen beszél.

10. Egy iskolában a tanulók tízfős csapatokat szerveznek. Egy diák több csapatnak is a tagja lehet, de akár egynek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két teremben úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja.

---

11. Hány $m < n$ egész (m, n) számpár megoldása az alábbi egyenletnek: $\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

12. Keressük meg az $3^x + 4^y = 5^z$ egyenlet összes pozitív egész megoldását.

13. Keressük meg az összes pozitív egész megoldását ennek az egyenletnek:

$$3^x - 5^y = z^2.$$