1.
Megoldás:

Indirekt módon, tfh nincs 2 olyan szorzatpár, amelyek 11-es osztási maradéka megegyezik.

A két 11-gyel osztható szám nem kerülhet különböző párokba, mert akkor ellentmondásra jutnánk, hiszen akkor 2 páros is azonos (0) maradékot adna. Tehát az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_{11} = 11$ és $b_{11} = 11$.

Már csak 1-től 10-ig vizsgáljuk a számokat.

Vegyük $(a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2) \cdot \ldots \cdot (a_{10} \cdot b_{10}) := A$ szorzatot, amiről tudjuk, hogy egyrészt $A = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10} \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{10} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 10 = (10!)^2$, hiszen a feladat szerint minden maradék pontosan egyszer szerepel, másrészt $A = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 10!$ az indirekt feltétel miatt (minden számpáros szorzatának különböző a 11-es osztási maradéka).

Ugyanakkor mivel 11 prím a Wilson tétel miatt $10! \equiv -1\ (mod\ 11)$ és $(10!)^2 \equiv 1\ (mod\ 11)$ ami azt jelentené, hogy egyrész $A \equiv -1\ (mod\ 11)$, másrészt $A \equiv 1\ (mod\ 11)$, ami nem lehetséges- Ez azt is jelenti, hogy nem adhatnak a feladatban szereplő szorzatok mind különböző maradékot 11-gyel osztva és ezt akartuk belátni.

(Wilson tétel: Ha p pozitív prímszám, akkor $(p-1)! \equiv -1 \text{ mod } (p)$)

Számelmélet, Nyári feladatsor   Klász Viktória

(2.)

$a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ 2n db kül. egész szám, amikor $\exists x$ $x \in \mathbb{Z}$, ami teljesíti a köv. egyenletet:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n}) - (-1)^n (n!)^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n}) = (-1)^n (n!)^2$$

áll: ha $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}$ $n \in \mathbb{Z}^+$

Lemma:
2n db különböző, nem 0 egész szám szorzatának abszolút értékének minimuma $(n!)^2$, és a szorzat ezt az értéket pontosan akkor veszi fel, ha a 2n db szám: $\{\underbrace{-n, -(n-1), \ldots, -2, -1}_{n \text{ db}}, \underbrace{1, 2, \ldots, n}_{n \text{ db}}\} = H$.

↳ Biz:
az könnyen látszik, hogy H halmaz elemeinek szorzatának az abszolútértéke valóban $(n!)^2$.

$$|\underbrace{(-n)(-(n-1))\ldots(-2)(-1)}_{(-1)^n \cdot n!}\underbrace{1\cdot 2 \ldots n}_{n!}| = |(-1)^n \cdot (n!)^2| = (n!)^2. \checkmark$$

Ha H elemei közül, vagyis a kiválasztott 2n db szám közül, bármelyiket kicseréljük egy nem H-beli egész számra, akkor az így keletkezett 2n db szám szorzatának abszolútértéke nőni fog az eredetihez képest. (hiszen az újonnan választott szám abszolútértéke nagyobb, mint a kicserélt szám abszolútértékénél, mivel az H eleme volt, a kicserélt szám az, az új pedig nem az.) ha $x \in H$: $1 \le |x| \le n$. ha $x \notin H$: $|x| > n$ (a szám nem 0!) $\boxed{x \in \mathbb{Z}}$ $x \neq 0$.

⇓
Ha nem szeretnénk növelni a szorzatát a 2n db számnak, akkor nem cserélhetjük ki egyik számot sem egy nem H-beli egészre. Viszont a számok darabszáma fix (2n db) és a számok különbözőek, ezért a lehető legkisebb abszolútértékű szorzat $= (-1)^n (n!)^2 = \underbrace{(-n)(-(n-1))\ldots(-2)(-1)}_{n \text{ db}}\underbrace{(1)\cdot 2 \ldots n}_{n \text{ db}}$, és ezt kellett belátni → a lemma igaz.

mivel $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ $2n$ db kül. egész szám, ezért $(x-a_1); (x-a_2); \dots (x-a_{2n})$ is $2n$ db kül. egész szám lesz. $(|a_z - a_\ell| = |(x-a_z)-(x-a_\ell)|$, a számok különbsége nem változik. $z, \ell \in \{1; 2; \dots 2n\})$

Az előző lemmát felhasználva $|(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n})| \geq (n!)^2$.

(ha ~~...~~ minden a_i-re; $i \in \{1; 2; \dots 2n\}$ $x - a_i \neq 0$.

~~Mivel~~ $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}) = (-1)^n (n!)^2 \neq 0$ ezért
$\Uparrow$ $n! \neq 0$

Mivel $\forall$ a_i-re ~~...~~, hogy $x - a_i \neq 0$) teljesül

A lemma alapján az egyenlőség eset akkor van, ha

$x-a_1; x-a_2; \dots x-a_{2n}$ ~~...~~ a H elemeinek valamely permutációja.

$$H = \{\underbrace{(-n); -(n-1); \dots -2; -1}_{n\text{ db}}; \underbrace{1; 2; \dots n}_{n\text{ db}}\}$$

$\Downarrow$

~~$a_z - a_\ell = (x-a_z) - (x-a_\ell)$ $z, \ell \in \{1; 2; \dots 2n\}$~~

$\Downarrow$

$a_1; a_2; \dots a_{2n}$ ~~...~~ az $x-n; x-(n-1); \dots; (x-1); (x+1); (x+2); \dots (x+n)$ számok valamely permutációja. (mivel az egyenletnek lesz megoldása, ennek biztosan teljesülnie kell.)
$x \in \mathbb{Z}$-re

Ilyenkor viszont igaz, hogy:

$$x = \frac{(x-n) + (x-(n-1)) + \dots + (x-1) + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n)}{2n}$$

$$(x-n) + (x-(n-1)) + \dots + (x-1) + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n) = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots a_{2n}}{2n}$$

$\downarrow$

Tehát beláttuk, hogy ennek mindenképp teljesülnie kell, ha az egyenletnek van egész megoldása $\Rightarrow$ készen vagyunk. //

3. feladat:
Legyen $ord_n(a) = b$, és c-re is legyen $a^c \equiv 1$ mod n. (így c legalább b) Tegyük fel, hogy c nem osztható b-vel. Ekkor legyen c=x*b+y, ahol y c b-s maradéka.

Tudjuk, hogy $a^b \equiv 1$ mod n, így ezt x. hatványra emelve $a^{b*x} \equiv 1$ mod n. Legyen a^y n-es maradéka h. Így mivel y egy b-s maradék, $y < b$, és $y >= 0$, azaz a^y n-es maradéka nem lehet 1, mert $ord_n(a) = b$ a legkisebb olyan pozitív egész. Ekkor viszont az előző kettőt összeszorozva: $a^{b*x+h} = a^c \equiv h$ mod n, ami nem lehet, mert h nem 1, a^c viszont 1 (mod n).

Azaz ha egy c-re $a^c \equiv 1$ mod n, akkor $ord_n(a)$ osztja c-t.

Legyen q egy prímosztó.
Így q osztja $2^p - 1$-et, azaz $2^p \equiv 1$ mod q. Mivel p egy prímszám, viszont a fentiek miatt oszthatónak kell lennie $ord_q(2)$-vel, $ord_q(2)$ csak 1, vagy p lehetne, de $2^1 = 2$ nem lehet kongruens 1-gyel moduló egy prím sem
Így $ord_q(2) = p$, viszont a Kis-Fermat-tétel miatt $2^{q-1} \equiv 1$ mod q, azaz a fentiek miatt $ord_q(2) = p$ osztani fogja q-1-et. Ha viszont p osztja q-1-et, akkor $p <= q - 1$, azaz $p < q \Rightarrow$ tetszőleges prímosztóról beláttuk, hogy nagyobb, mint p.

Számelmélet 4

Leellenőrizhetjük, hogy azok az ab-1 értékek, amelyekben csak a 2, 5, 13 számok szerepelnek, mind négyzetszámok. Így azt kell belátnunk, hogy 2d-1, 5d-1 és 13d-1 számok valamelyike biztosan nem négyzetszám.

A bizonyítás legyen indirekt:

$$2d - 1 = x^2 \ (1)$$

$$5d - 1 = y^2 \ (2)$$

$$13d - 1 = z^2 \ (3)$$

ahol x, y, z egész.

(1) alapján x páratlan, azaz $x^2 \equiv 1 \ mod\ 4$ (ismert, hogy páratlan négyzetszámok 4-gyel osztva 1 maradékot adnak, páros négyzetszámok pedig oszthatóak 4-gyel), így d páratlan (4). Ebből és (2)-ből és (3)-ból következik, hogy y és z páros (5).

(3)-ból kivonva (2)-t:

$$8d = z^2 - y^2 \ (6)$$

Mivel d páratlan (4), $8d \equiv 8 \ mod\ 16$. (d=2k+1, 8d=16k+8)

y és z páros (5), tehát $z^2 - y^2 \equiv 0 \ vagy\ 4\ vagy\ 12\ mod\ 16$, így (6) nem állhat fenn, hiszen a jobb és bal oldal modulo 16 nem egyezik meg.

Tehát nem létezik megfelelő d.

Glattfelder Hanna

5. feladat

Ha $n = 1$, akkor $1! = 1$, ami teljes hatvány.

Ha $n \geq 2$, akkor vegyük az n-nél kisebb, vagy egyenlő lehető legnagyobb páros számot, $2k$-t! (Itt tehát $k \geq 1$).

A Csebisev-tétel kimondja, hogy ha $k \geq 1$ pozitív egész, akkor létezik olyan p prímszám, amelyre $k < p \leq 2k$.

Tehát $n!$ prímtényezős felbontásában p az első hatványon szerepel, mert $p \leq 2k \leq n$, tehát szerepel az $1, 2, \ldots, n$ számok között, viszont $p > k$, tehát $p \geq k + 1$, azaz $2p \geq 2k + 2 > n$, tehát p-nek a következő többszöröse már nagyobb mint n.

Egy pozitív egész szám m-dik hatványának prímfelbontásában minden prímtényező hatványkitevője osztható m-mel. Ha tehát egy “magasabb” hatványról van szó, $m > 1$, tehát egyik prímtényező sem szerepel első hatványon. Tehát $n!$ nem lehet egy egész szám magasabb hatványa ha $n > 1$.

6. feladat

$x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei legyenek k_1 és k_2, ekkor a Viéte formulák miatt $c = k_1k_2$ és $-b = k_1 + k_2$. Így b és c egészek, hiszen két egész szám összegeként illetve szorzataként előállnak.

Hasonlóképp, $2x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$ egynelet gyökei legyenek l_1 és l_2, ekkor $\frac{c+1}{2} = l_1l_2$ és $-\frac{b+1}{2} = l_1 + l_2$. Azaz $c = 2l_1l_2 - 1$ és $-b = 2(l_1 + l_2) + 1$, így c és b páratlan.

Mivel c páratlan, ezért k_1k_2 is, ez csak úgy lehet ha k_1 és k_2 is páratlan, de ekkor $k_1 + k_2 = b$ páros lesz, hiszen két páratlan szám összege páros.

Azonban ez ellentmondás, hiszen fentebb beláttuk, hogy b páratlan. Így nem létezik a feladat állításának megfelelő (b, c) számpár.

Egy (a,b) számpárt egyértelműen meghatároz az $(x,y)=(4a-b,4b-a)$ számpár (és viszont):

Ha $(x,y)=(4a-b,4b-a)$, akkor $a+b=\frac{x+y}{3}$ és $a-b=\frac{x-y}{5}$. Ekkor $a=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{5}\right)$ és $b=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{5}\right)$.

Adott (x,y) mellett akkor és csak akkor lesz $\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{5}\right)$ és $\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{5}\right)$ egyaránt egész számokból álló, ha $\frac{x+y}{3}$ és $\frac{x-y}{5}$ egyaránt egészek és azonos paritásúak. (Azért kell, hogy mindkettő egész legyen, hogy $a+b$ és $a-b$ is egész lehessen; az azonos paritás ahhoz kell, hogy a és b is egész legyen. Ezek a feltételek elégségesek is.)

Tehát az olyan (a,b) egész számpárok száma, melyre $(4a-b)(4b-a)=2010^n$ megegyezik az olyan (x,y) egész számpárok számával, melyre $xy=2010^n$, $3|x+y$, $5|x-y$ és $\frac{x+y}{3}$ és $\frac{x-y}{5}$ azonos paritásúak ($\Leftrightarrow$ $x+y$ és $x-y$ azonos paritásúak; ez minden egész (x,y)-ra igaz, így ezzel nem kell külön foglalkozni).

Ha $n=0$:

$xy=2010^0=1$ csak úgy lehetséges, hogy $(x,y)=(1,1)$ vagy $(x,y)=(-1,-1)$. Egyik esetben sem igaz, hogy $3|x+y$. Tehát $n=0$ esetén nincsen ilyen (a,b) számpár.

Ha $n=1$:

Ha $xy=2010^1=2\cdot3\cdot5\cdot67$, akkor x és y közül pontosan az egyik osztható 5-tel. Ekkor viszont $5\not|x-y$. Tehát $n=1$ esetén sincsen megfelelő (a,b) számpár.

Ha $n\geq 2$:

Ha $xy=2010^n=2^n\cdot3^n\cdot5^n\cdot67^n$, akkor x és y közül legalább az egyik osztható 3-mal és legalább az egyik osztható 5-tel. Ha $3|x+y$ és $5|x-y$, akkor ebből következik, hogy mindkét szám osztható 3-mal és 5-tel is. Minden olyan (x,y) egész számpár, ahol $15|x,y$ és $xy=2010^n$ megfelelő is. Ezek megfeleltethetőek az olyan $\left(\frac{x}{15},\frac{y}{15}\right)$ egész számpároknak, amikben a számok szorzata $\frac{2010^n}{15^2}$, azaz elég ezeket megszámolni. Az $\frac{x}{15}$ a $\frac{2010^n}{15^2}=2^n\cdot3^{n-2}\cdot5^{n-2}\cdot67^n$ szám tetszőleges (pozitív vagy negatív) osztója lehet, így összesen $2(n+1)(n-1)(n-1)(n+1)=2(n^2-1)^2$-féle értéket vehet fel (és $\frac{x}{15}$ meghatározza $\frac{y}{15}$-öt is).

Tehát $n\leq 1$ esetén 0, míg $n\geq 2$ esetén $2(n^2-1)^2$-féle megfelelő (a,b) számpár adható.