

Spektrál gráfelmélet feladatok 3

1. Mutasd meg, hogy ha egy páros gráfban nincsen teljes párosítás akkor a 0 sajátértéke a gráfnak.

2. Mik a sajátértékei az n csúcsú útnak és körnek?

3. Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mi $G_1 \star G_2$ gráf sajátértékei ahol $G_1 \star G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: $V(G_1 \star G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ és (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve ha minden koordinátában vagy megegyeznek vagy össze vannak kötve.

4. (a) Mutasd meg, hogy ha G kromatikus száma k akkor G -nek van olyan feszített G' részgráfja, amelyben a minimális fokszám legalább $k - 1$.

(b) Legyen G spektrálsugara $\lambda(G)$, kromatikus száma $\chi(G)$. Bizonyítsd be, hogy

$$\chi(G) \leq \lambda(G) + 1.$$

Mikor van egyenlőség?

(c) Mutasd meg, hogy az előző becslésben $\chi(G)$ helyett a listaszínezési számot is lehet írni!

5. Legyen n_+, n_- a G gráf nemnegatív illetve nempozitív sajátértékeinek a száma. Legyen $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy $\alpha(G) \leq \min\{n_+, n_-\}$.

* * *

6. Egy T fa esetén jelölje $\ell_k(T)$ az k -fokú csúcsok számát.

(a) Mutasd meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{T \in \mathcal{T}(K_n)} \ell_1(T) = \frac{1}{e},$$

ahol $\mathbb{E}_{T \in \mathcal{T}(K_n)}$ a K_n teljes gráf feszítőfáira való átlagolás.

(b) Mi lesz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{T \in \mathcal{T}(K_n)} \ell_k(T)$$

rögzített k -ra?

(c) Mi lesz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{T \in \mathcal{T}(G(n,d))} \ell_k(T)$$

rögzített k -ra, ahol $G(n, d)$ egy random d -reguláris gráf n csúcson. Vagyis itt két átlagolás van: egy $G(n, d)$ -re, egy pedig a feszítőfájára.

7.(a) Mutassuk meg hogy ha egy G gráfban nincsen C_6 , akkor elég az éleinek felét kihajítani ahhoz, hogy C_4 se legyen benne. (Győri-lemma)

(b) Konstruáljunk olyan $G(n)$ gráfot/ gráfcsaládot, amelyben *sok* $K_{4,4}$ van, ám bármely kettő közülük 0 vagy 1 pontban metszi egymást! (Motiváció: Győri-lemma általánosításához kapcsolódna: egy ilyen gráf nem tartalmazza a $C_6[2]$ gráfot, ami a 6 hosszú kör felfújta.)