# Vegyes feladatok

1. Legyen $G$ egy fa és legyenek $G_1, \dots, G_k$ olyan részfái, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Mutasd meg, hogy ekkor az összesnek van közös pontja.

2. Mutasd meg, hogy ha $G$ összefüggű gráf, akkor tetszőleges két maximális hosszú útjának van közös pontja. Igaz-e, hogy az összesnek van közös pontja?

3. (a) Legyen $G$ egy fa és legyenek $G_1, \dots, G_k$ részfái. Legyen $H$ az a gráf, melynek csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, k\}$ és $(i, j) \in E(H)$ ha $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$. Mutasd meg, hogy $H$ minden legalább 4 hosszú körében van húr.

(b) Mutasd meg, hogy $H$ minden legalább 4 hosszú körében van húr akkor reprezentálható a fenti módon. (Az ilyen gráfokat *merevkörű gráfok*nak hívjuk, angolul *chordal graph*.)

4. Határozzuk meg azon $n$ csúcsú fákat, melyben $\sum_{x,y \in V(G)} d(x, y)$ maximális illetve minimális, ahol $d(x, y)$ az $x$ és $y$ távolságát jelöli.

5. Legyen $G$ egy $d$–reguláris páros gráf $n$ csúcson és jelölje $f_k(G)$ azon körmentes élhalmazokat (vagyis erdőket), amelyeknek pontosan $k$ éle van. ($f_0(G) = 1$ minden $G$ gráfra.) Mutasd, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k(G)(-d)^{n-k} = 0.$$

6. Adott egy $G$ gráf minden élén egy $w_e$ súllyal. Legyen $\mathcal{T}(G)$ a $G$ gráf feszítőfáinak a halmaza és legyen $Z = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \prod_{e \in E(T)} w_e$. Legyen továbbá

$$\overline{w}_e = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}(G) \\ e \in E(T)}} \prod_{f \in E(T)} w_f.$$

Igaz-e, hogy tetszőleges összefüggő $G$ gráf esetén léteznek $w_e > 0$ súlyok, melyekre $\overline{w}_e = w_e$ minden élre?