Valószínűségi módszer feladatok

1. (a) Van egy n csúcsú és e élű gráfunk. Mutasd meg, hogy van olyan részgráfja ami páros és legalább $e/2$ élt tartalmaz!

(b) Legyen $k = [n/2]$. Mutasd meg, hogy a gráfnak van olyan vágása ami legalább az élek $\frac{k}{2k-1}$ részét tartalmazza.

2. (a) Tegyük fel, hogy n, k számokra fennáll, hogy $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Mutasd meg, hogy $R(k, k) > n$. Speciálisan mutasd meg, hogy $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ha $k \geq 3$.

(b) Mutasd meg, hogy tetszőleges n, k számra $R(k, k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. Milyen alsó becslés jön ki $R(k, k)$-ra?

(c) Mutasd meg, hogy létezik egy C szám, hogy bármely n-re létezik egy G gráf n csúcson, hogy $\chi(G) > \frac{n}{C \log n}$, $\omega(G) < C \log n$.

3. Egy teniszversenyen n ember indult, mindenki mindenkivel játszott egyszer. A verseny végeredményét k-jónak hívjuk ha tetszőleges k emberhez van olyan versenyző aki mindegyiket legyőzte. Mutasd meg, hogy adott k esetén létezik $n_0(k)$, hogy $n \geq n_0(k)$ esetén van k-jó verseny.

4. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n-re van olyan tournament, amelynek legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-útja van.

5. Legyen G gráf csúcsainak fokai $d_1, \ldots, d_n$. Legyen $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$