Valószínűségi módszer feladatok 2

1. Legyen G és H két gráf n csúcson. Mutasd meg, hogy van G-nek olyan K részgráfja, amely izomorf H egy részgráfjával és legalább $\frac{e(G)e(H)}{\binom{n}{2}}$ éle van.

2. Legyen G gráf csúcsainak fokai $d_1, \ldots, d_n$. Legyen $\nu(G)$ a G gráf legnagyobb olyan csúcshalmazának mérete amely körmentes részgráfot feszít. Mutasd meg, hogy

$$\nu(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{d_i + 1}.$$

3. Mutasd meg, hogy n pozitív egész szám közül mindig kiválasztható $\lfloor n/3 \rfloor$ melyek között az $a_1 + a_2 = a_3$ egyenletnek nincs megoldása.

4. Egy $G = (V, E)$ gráfban a minimális fokszám $\delta > 1$. Mutasd meg, hogy van a gráfnak egy domináló halmaza, melynek mérete legfeljebb

$$\frac{n(1 + \ln(\delta + 1))}{(\delta + 1)}.$$

(Egy U halmazt domináló halmaznak nevezünk ha minden $v \in V - U$ esetén van v-nek szomszédja U-ban.)

5. Legyen H r-uniform e élű hipergráf n csúcson. Tegyük fel, hogy $n \leq 2e$. Mutasd meg, hogy létezik olyan $S \subseteq V(H)$, mely nem feszít élet és

$$|S| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2e} \right)^{1/(r-1)} n.$$