EGMO válogatóverseny, 2013. november

1, **Az $OAB$ háromszögben B-nél levő szög derékszög. Legyen $k$ tetszőleges kör, melynek középpontja az OB szakaszon nyugszik, és érinti az $OA$ oldalt. Legyen az A-ból a $k$ körhöz húzott, $OA$-val nem egyező érintőn T az érintési pont. Igazoljuk, hogy az $OAB$ háromszög B-ből húzott súlyvonala $AT$-t egy olyan M pontban metszi, melyre $MB = MT$ teljesül.**

Többféle út lehetséges: jellemző összetevők: szögszámolás; észrevétel, hogy 5 pont egy körön nyugszik (Thalesz tétel), melynek átmérője is be van rajzolva - vagy húrtrapéz találása; kerületi szögek tétele.
**Mire kell figyelni:** az érintő kör középpontja elhelyezkedésétől függ az ábra - diszkusszió!!; vagy irányított szögekről kell beszélni, vagy (és ez a biztos út) rendesen megnézni az eseteket. (2db)

- Teljes megoldás: 10p
- Teljes megoldás egy ábra erejéig, diszkusszió nélkül: 8p
- eljutni oda, hogy húrnégyszögséget szeretnénk igazolni 4p.
- néhány fontos szög felvétele, és velük való számolás, ekviavlens alakra hozás 2p

(továbbiak arányosan)

2, **Egy nagy kockát András szétfűrészelt $8\times8\times8$ egyforma kiskockára (lap-párhuzamos vágásokkal). Anna kiválaszthat 129 kiskockát. Igazoljuk, hogy az Anna által választott kockák között van 17, melyek közül semelyik kettő sem esett egy él-párhuzamos egyenesre az eredeti nagy kockában! Mutassuk meg, hogy kevesebb kiskocka választása esetén ebben már nem lehetünk biztosak!**

128 (és kevesebb) kiskockát ki lehet választani úgy, hogy veszünk éllel párhuzamos egyenest, és 16 ezzel az egyenessel párhuzamos sorból választunk csak. (PL. egy $2 \times 8 \times 8$-as vagy $4 \times 4 \times 8$-as résztéglatestjéből a kockának). Ekkor nyilván nem lesz 17 kiskocka, mind külön sorból.
Másrészt be lehet osztani a kiskockákat 8 kupacba, hogy minden kupacban teljesül az összes kiskockapárra a következő: nem élpárhuzamos egyenesen nyugszanak. Ekkor ha 129 kiskockát választunk, lesz olyan kupac, ahonnan legalább 17-et választunk, és kész. (Skatulya elv.) A beosztás egyetlen kritériuma, hogy ha $(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z}_8$ szerint koordinátázzuk a kockákat, akkor semelyik kupacba ne legyen két kiskocka, aminek van két azonos koordinátája is. Ez teljesíthető például könnyen ellenőrízhetően, ha az $i$ kupacba azok kerülnek, amire $x + y + z = i \pmod 8$.
(Vegyük észre, hogy ez annak felel meg, mintha térbeli, bizonyos tengelyiránnyal nem párhuzamos síkokkal metszenénk el a kockát!)

- Teljes megoldás: 10p=4+6p a két részre rendre.
- 10-1=9 pont, ha a kupacokra osztás jóságát nem igazoljuk.
- 4+1=5p, ha a koordinátákat bevezetjük, és átfogalmazzuk a feladatot.
- 1–2p, ha nemtriviális megfigyeléseket teszünk.

(továbbiak arányosan)

3, **Legyenek az $x_i$ számok ($i = 1 \dots n$) pozitívak, és jelölje összegüket $S$. Igazoljuk, hogy**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2S - x_i} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Többféle út lehetséges:
a) Jensen egyenlőtlenség alkalmazása, pontos feltételekkel
b) rendezési tétel: a számlálók sorozata, és a nevezők sorozatának inverzei fordítottan rendezettek. A páronkénti szorzatokból képezett összegeket ciklikus eltoltak szerinti páronkénti összegekkel egybevetve és az így kapott egyenlőtlenségeket összeadva megkaphatjuk a kívánt egyenlőtlenséget
c) Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség másik formája, a Titu lemma alkalmazása; majd egy számtani-négyzetes közép közti $\neq$;
d) az előző variánsa, amelyben új változók bevezetésével ekvivalens alakra hozunk, melyben a változók csak a számlálóban, vagy csak a nevezőben tűnnek fel; és innen számtani-négyzetes közép.

**Mire kell figyelni:** Felhasznált tétel pontos idézése, és az alkalmazás pontos megadása. Jó irányban becslünk-e amikor becslünk. Ekvivalens alakra hoztunk-e az átalakításoknál.

• Teljes megoldás: 10p
• 8–9 pont, ha valami a feltételeknél nem lett világosan ellenőrízve.
• 3p, ha szebb alakra hoztuk a baloldalt, csak a számlálóban vagy csak a nevezőben vannak változók; vagy ha a rendezési tételt jól alkalmaztuk.
• 2p, n=2 eset felírása. (az előzővel nem additív!)
(továbbiak arányosan)

4, **Legyen $n > 4$ rögzített egész. Jelölje $I_m^n$ az $n$ egymást követő egész halmazát az $[m, m+n-1]$ intervallumban $m$ egész számra. Nevezzük $I_m^n$ halmaz egy részhalmazát *frankó*nak, ha van benne 3 páronként relatív prím egész. Tetszőleges $n$-re határozzuk meg azt a $\phi(n)$ számot, melyre teljesül, hogy**

- **a $\phi(n)$ méretű részhalmazok minden $I_m^n$ esetén *frankó*k;**
- **létezik $m$, melyre $I_m^n$-nek van $\phi(n)-1$ méretű, *nem frankó* részhalmaza.**

Ha $I_m$-ből azokat a számokat veszem, amik $0, 2, 3$ vagy $4$ maradékot adnak $\pmod 6$, akkor ezek között bárhogy választok 3-at, lesz két páros, vagy két 3-mal osztható. Vagyis az ilyen részhalmaz *nem frankó*. Ha $n$ rögzített, persze $m$-től függ, hogy az ilyen maradékot adó számok részhalmaza hány elemű, de jól meghattározott, és csak a 6-os maradéktól függ.
Ebből adódik, hogy

$$\phi(n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$$

Másrészről: $\phi(6) = 5$, ezt könnyű megmutatni.
Ezt azt jelenti, hogy bármely 6 egymást követő számból, amennyiben legalább 5-öt választunk, akkor frankó lesz a halmaz. Tehát, egymást követő hatos blokkokra bontva az $n$-elemű halmazt, ha nem veszünk el minden blokkból két elemet, akkor frankó lesz a halmaz, így legalább $2n/6$ elemet el kell dobni, hogy ne legyen frankó. Sőt, ha $n$ 6-os maradéka legalább 3, akkor legalább még 1 elemet el kell dobni, hiszen az $n$ elemű halmaz kezdőeleme beállítható úgy, hogy a hatos blokkok mellett fennmaradó halmazban is legyen 3 páronként relatív prím.
Ebből az előző szám élessége is adódik.

• Teljes megoldás: 10p
• felső becslések: nemtriviális: 1p, 2/3-os nagyságrendű (vagy megjegyzés, hoyg a 3-as maradék is számít): 3p
• alsó becslések: kis $\phi$ értékek helyesen, közte a $\phi(6)$ : 2 pont
• alsó becslések: nemtrivi: 1 pont, 2/3-os arány: 2pont (az előzőekkel additívak)
(továbbiak arányosan)