EGMO 2. válogatóverseny, 2014. január 31.

1. Egy étteremben L fajta leves és F főétel közül lehet választani $(L, F > 1)$. Egy M tagú osztály kitalálta, hogy minél többféle rendelést tesznek (mindkét fogásból 1-1-et választva), azaz senki sem rendelni ugyanazt a két fogást. Észreveszik a rendelés után, hogy ha valaki csak kétféle levest és kétféle főételt szeret, akkor is biztosan tudna még ebédet kérni ezek után úgy, hogy rendelése ne egyezzen meg semelyik korábbi rendeléssel. Igazoljuk, hogy $M \leq F(F-1)/2 + L$!

2. Az ABC háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1, a BC oldalt az A_1, a CA oldalt pedig a B_1 pontban érinti.

   Ismert, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy ponton mennek át. (Ceva tétel következménye.)

   Jelöljük ezt a pontot N-nel. A háromszög bármely csúcsához tekintsük azt a két kört, melyek átmennek N-en és érintik a csúcshoz tartozó mindkét oldalt, s válasszuk ki a csúcshoz közelebb esőt. Ily módon három kört kapunk. Igazoljuk, hogy a hozzájuk tartozó hat érintési pont egy körön van!

3. Legyen a egész szám, és tekintsük a $p(x) = x^5 - x + a$ polinomot.

   a) Bizonyítsuk be, hogy ha a nem osztható 5-tel, akkor $p(x)$ nem bontható fel két egész együtthatós, legalább elsőfokú polinom szorzatára!

   b) Adjunk olyan $a \neq 0$-t, amire $p(x)$ felbomlik a fenti szorzatalakban!

4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész m számhoz végtelen sok (x, y) egészekből álló számpár létezik, melyekre:

   i, x és y relatív prímek,

   ii, y osztja $x^2 + m$-et,

   iii, x osztja $y^2 + m$-et!