

Válogatóverseny 2. Megoldások

1. Gondoltam egy egész számra az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazból ($n \in \mathbb{Z}^+$), ezt szeretnéd kitalálni speciális barkochba-kérdésekkel. Ilyen típusú kérdést tehetsz fel: Igaz-e a gondolt számra, hogy (valamely általad választott) racionális számtól legfeljebb (általad választott) távolságra van? A kérdéseket előre le kell írni, én az összes kérdés leírása után válaszolok. Mennyi a minimális kérdésszám, amivel biztosan kitalálható a gondolt szám?.

Megoldás

Konstrukció adható arra, hogy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ kérdés elegendő, (5p) valamint igazolható, hogy ennyi szükséges is (5p).

Legyen X a gondolt szám. a Kérdések lényegében zárt intervallumok.

Konstrukció kérdésekre - 1. változat: $Q_i : X \in [i, \lceil n/2 \rceil + i - 1]$ ahol $i = \{1, 2, \dots, \lceil n/2 \rceil\}$

Konstrukció kérdésekre - 2. változat: $Q_i : X \in [2i - 1, 2i + 1]$ ahol $i = \{1, 2, \dots, \lceil n/2 \rceil\}$.

Konstrukció kérdésekre - 3. változat: $Q_i : X \in [\lfloor n/2 \rfloor - i + 1, \lceil n/2 \rceil + i - 1]$ ahol $i = \{1, 2, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1\}$ és $Q_{\lceil n/2 \rceil} : X \in [1, n/2]$.

Kell ellenőrizni, de könnyű, hogy az ezekre kapott válasz alapján mindig eldönthető, mi az X .

Ennyi kell is. Az általánosság sértése nélkül feltehetjük, hogy olyan intervallumokkal dolgozunk, amiknek végpontjai nem egészek (hiszen csak az intervallumbeli egészek számítanak). Ekkor a kérdezőhalmazok mint intervallumok végpontjainak halmazának fedni kell az $(i, i + 1)$ egységintervallumokat ($i = 1 \dots n - 1$), hogy el legyen különítve i és $i + 1$; sőt 1-et és n -et is el kell különíteni, emiatt kell minimum egy intervallumvégpont 1 elé vagy n mögé. Ez összesen n intervallumvégpont, azaz $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ intervallum tényleg kell.

Megjegyzések

- Fontos hogy jó legyen a sejtés (optimális a konstrukció), különben a bizonyítással esetleg átverheted magad... Kis esetekre (többre is!) célszerű ellenőrizni!

- Szuper, ha a kérdéseket intervallumokkal ábrázolod is, de az egzakt megadás a legjobb - arra biztos nem veszítesz pontot.

- ha egészrészes feladat van, bátran írd fel ps-ra és ptn-ra (sokkal kisebb a tévesztés esélye), használva az $n = 2k + 1$, vagy $n = 2k$ -t.

- Nem igaz az, hogy ha az intervallumvégpontok szépen felosztják az egységintervallumokat a megoldás második része szerint, akkor az abból származó konstrukció automatikusan jó lesz! Ez még mindig csak szükséges feltétel!

- Teljes indukció a bizonyításra itt meglehetősen körülményes, nem igazán működik.

2. Az ABC háromszög köréírható körének és a csúcsokból induló szögfelezőknek a (csúcsoktól különböző) metszéspontjait jelölje rendre A_1, B_1, C_1 . Jelölje P az AA_1 egyenesnek és az ABC külső szöge szögfelezőjének metszéspontját, hasonlóképpen Q és R rendre a BB_1 -nek és a BCA külső szöge szögfelezőjének, illetve a CC_1 -nek és a CAB külső szöge szögfelezőjének metszéspontját. Bizonyítsuk be, hogy

$$t_{PQR\Delta} = 2T \geq 4t_{ABC\Delta},$$

ahol T az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területét jelöli.

Megoldásvázlat

I legyen a szögfelezők metszéspontja, a beírt kör kp-ja.

Azt kell észrevenni, hogy P, Q, R a definíció miatt éppen a hozzáírt körök középpontjai (belső, és külső szögfelezők metszéspontjaiból jönnek...). Következő kulcsészrevétel, hogy $PQR\Delta$ talpponti háromszöge éppen ABC - ez abból következik, hogy a külső és belső szögfelezők merőlegesek. $PQR\Delta$ I -ből kp-osan kicsinyítve $1/2$ arányban, ez éppen $A_1B_1C_1$. Ez a kerületi szögek tételének alkalmazásából következik: I a $PQR\Delta$ -ben magasságpont, így $IAR\Delta, IAQ\Delta, IBR\Delta, IBP\Delta, ICP\Delta, ICQ\Delta$ derékszögűek, és A_1, B_1, C_1 az IP, IQ, IR szakaszokat felezi a szögekből adódó $IA_1 = BA_1 = CA_1 =$ egyenlő szakaszok és a Thalesz tétel miatt.

Bontsuk fel $t_{PQR\Delta} = 2T$ igazolásához a $PQR\Delta$ -et és a $AC_1BA_1CB_1$ hatszöget az IP, IQ, IR félegyeneseikkel. Látható az előbbi szakasz-egyenlőségekből, hogy $tIA_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot tPIR\Delta$, és hasonlóképp a másik kettő területre is. Ezzel az egyenlőség kész.

A $T \geq 2t_{ABC\Delta}$ egyenlőtlenség igazolásához tekintsük az $ABC\Delta$ M magasságpontját, és tükrözzük ki az oldalegyenesekre (M_a, M_b, M_c), így kapva a $tABC\Delta$ -t megduplázó $t_{AM_cBM_aCM_b}$ -t. Ez jól összevethető $t_{AC_1BA_1CB_1}$ -vel, és nem lehet nagyobb nála, mert a hatszögekből az $ABC\Delta$ -t kivágva, a

$$t_{ABC_1} \geq t_{ABM_c}, \quad t_{BCA_1} \geq t_{BCM_a}, \quad t_{CAB_1} \geq t_{CAM_b}$$

területegyenlőtlenségek triviálisan teljesülnek abból adódóan, hogy M_a, M_b, M_c is a köríven fekszenek, ám A_1, B_1, C_1 ráadásul felezőpontok a BC, CA, AB íveken.

Megjegyzések

- Az egyenlőtlenség lényegében azzal ekvivalens, hogy a talpponti háromszög területe legfeljebb negyede a háromszög területének. Ehhez kapcsolódó állítása sugáregyenlőtlenség: $2r \leq R$ a beírt és köréírt kör sugara között, valamint az az ismert tétel (Fagnano, 1775), hogy a háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a minimális hegyesszögű háromszögek esetén.

Szintén ekvivalens forma a trigonometrikus $t_{ABC\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, $t_{talpponti} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$ -ból eredeztethető

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \geq \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma.$$

- a Feuerbach körre hivatkozva is lehetett dolgozni: a $PQR\Delta$ Feuerbach körét éppen ennek a háromszög magasságpontjából a köréírt körének $1/2$ arányú kicsinyített képe adja, amin rajta vannak a magasságtalppontok (A, B, C), oldalfelvező-pontok, és a magasságpont-csúcs szakaszok felezőpontjai (A_1, B_1, C_1).

- leírás egzaktága: ha használunk szögeket, a kiszámolást, egyenlőségüket le kell írni.

- "suliban tanultuk hogy" - ilyen nincs. Vagy tételként mondunk ki valamit, vagy be is bizonyítjuk a versenyen (szemben az órai dolgozattal)

3. Jelölje $d(n)$ és $\varphi(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak számát, illetve az n -hez relatív prímek számát a pozitív, n -nél nem nagyobb egészek körében. Határozzuk meg azon n pozitív egészeket, melyekre teljesül, hogy az $\{n, d(n), \varphi(n)\}$ számok közül kettő számtani közepe a harmadik szám.

Megoldás

Könnyű ellenőrizni, hogy $n = 1, 4, 6, 9$ jó megoldás.

Ha $n > 1$, akkor $n > d(n)$ és $n > \varphi(n)$ nyilvánvalóan, vagyis két eset lehet: I. $\frac{n+\varphi(n)}{2} = d(n) \implies d(n) > \frac{n}{2}$ és II. $\frac{n+d(n)}{2} = \varphi(n) \implies \varphi(n) > \frac{n}{2}$.

I. eset: $d(n) \implies d(n) > \frac{n}{2}$ akkor lehet, ha $1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ mind osztja n -et, hiszen $\frac{n}{2}$ -nél nagyobb számok között csak n lehet osztó. Speciel $n/2 - 1$ osztja n -et, ami $n > 6$ esetén nem lehet: ha $n > 6$, akkor

$$2 < \frac{n}{n/2 - 1} < 3.$$

Vagyis I. esetben csak $n = 1, 4, 6$ jó.

II. eset: $\varphi(n) > \frac{n}{2}$. Ez csak akkor lehet, ha $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$ páratlan. Viszont $n \equiv d(n) \pmod{2}$, azaz $d(n) = \prod (\alpha_i + 1)$ páratlan, vagyis n -ben minden prímkitevő páros: n négyzet-szám és $p_i \geq 3, \alpha_i \geq 2$.

Ismert hogy $\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, ebből adódóan $d(n) = 2\varphi(n) - n$ alapján $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i-1} | d(n) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + 1)$. De vegyük észre, hogy az osztó sokkalta nagyobb szeret lenni, mint az osztandó általában:

$$p_i^{\alpha_i-1} \geq 3^{\alpha_i-1} \geq (1 + \alpha_i).$$

Egyenlőség csak akkor ha $p = 3$ és ekkor $\alpha = 2$ kell hogy legyen. Vagyis csak a 9 adódik ebben az esetben $n > 1$ számok között.

Megjegyzések

- visszatekintve: a kulcs a számelméleti függvények ismerete mellett a nagyságrendi becslés volt - nem ritkán jön jól!

4. Határozzuk meg azokat az egész együtthatós másodfokú $P(x)$ polinomokat, amelyekre teljesül, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $P(a)$ és $P(b)$ szintén relatív prímek.

Megoldás

Legyen $P(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, $c_2 \neq 0$

Tetszőleges egész együtthatós polinomra triviálisan teljesül, hogy $a, a+b \in \mathbb{Z}$ behelyettesítése esetén $P(a)$ és $P(a+b)$ különbsége osztható b -vel:

$$b|P(a+b) - P(a).$$

Vegyünk egy $a \neq 0$ egész számot. Az előző sor azt jelenti, hogy ha p egy prímosztó $P(a)$ -ban, akkor p prímosztó lesz $P(a+p)$ -ben is. Ugyanakkor $(a, a+p) = 1 \Leftrightarrow p \nmid a$. Vagyis $P(a)$ minden prímosztója a -nak is osztója kell legyen, másképp fogalmazva $P(a)$ prímtenyezői csak a prímtenyezői közül kerülhetnek ki.

Ebből adódóan $P(\pm 1) = \pm 1$, és minden prímhatványra $P(p^\alpha) = \pm p^\beta$ ($\beta \in \mathbb{Z}^+$).

$|x| < |P(x)| < |x^3|$ ha x elegendően nagy, vagyis $P(p) = \pm p^\beta$ csak akkor lehet minden prímre, ha $\beta = 2$ minden elegendően nagy prím esetén, de akkor csak az lehet, hogy $P(x) = \pm x^2$.

Megjegyzések

- a $\pm$ jeleket sok esetben elfelejtettük. Erre célszerű figyelni!
- Relatív prím: ezt a fogalmat az egészek körében értelmezzük általában, nem csak a természetes számok körében! Az a és b egész számok esetén azt mondjuk, hogy az a a b -hez relatív prím, vagy egyszerűen a és b relatív prímek, ha az 1-en és -1-en kívül nincs más közös osztójuk. Vagy ami ezzel ekvivalens, ha a és b legnagyobb közös osztója 1.
- a fenti oszthatósági alapgondolatot követve, és az 1 helyen felvett érték segítségével (ami miatt $c_2 + c_1 + c_0 = \pm 1$), oszthatósági relációkkal sorban a c_0, c_1 értékekről is belátható, hogy 0-k.
- Figyelem! Az, hogy egy számot minden prím oszt, még nem jutunk ellentmondásra! Ezért zártuk ki az $a = 0$ esetet a vizsgálatunkból mert ott előfordulhat!
- visszatekintve: a prímeken felvett érték segített sokat - ez függvényegyenleteknél is előjön, nem csak polinomoknál.