Válogatóverseny 2. — EGMO 2015, Minszk

1. Gondoltam egy egész számra az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból ($n \in \mathbb{Z}^+$), ezt szeretnéd kitalálni speciális barkochba-kérdésekkel. Ilyen típusú kérdést tehetsz fel: Igaz-e a gondolt számra, hogy (valamely általad választott) racionális számtól legfeljebb (általad választott) távolságra van? A kérdéseket előre le kell írni, én az összes kérdés leírása után válaszolok. Mennyi a minimális kérdésszám, amivel biztosan kitalálható a gondolt szám?

2. Az ABC háromszög köréírható körének és a csúcsokból induló szögfelezőknek a (csúcsoktól különböző) metszéspontjait jelölje rendre A_1, B_1, C_1. Jelölje P az AA_1 egyenesnek és az $ABC\angle$ külső szöge szögfelezőjének metszéspontját, hasonlóképpen Q és R rendre a BB_1-nek és a $BCA\angle$ külső szöge szögfelezőjének, illetve a CC_1-nek és a $CAB\angle$ külső szöge szögfelezőjének metszéspontját. Bizonyítsuk be, hogy

$$t_{PQR\triangle} = 2T \geq 4t_{ABC\triangle},$$

ahol T az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területét jelöli.

3. Jelölje $d(n)$ és $\varphi(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak számát, illetve az n-hez relatív prímek számát a pozitív, n-nél nem nagyobb egészek körében. Határozzuk meg azon n pozitív egészeket, melyekre teljesül, hogy az $\{n, d(n), \varphi(n)\}$ számok közül kettő számtani közepe a harmadik szám.

4. Határozzuk meg azokat az egész együtthatós másodfokú $P(x)$ polinomokat, amelyekre teljesül, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $P(a)$ és $P(b)$ szintén relatív prímek.

Jó munkát!
A rendelkezésre álló idő 4 óra.
Minden feladat 10 pontot ér.