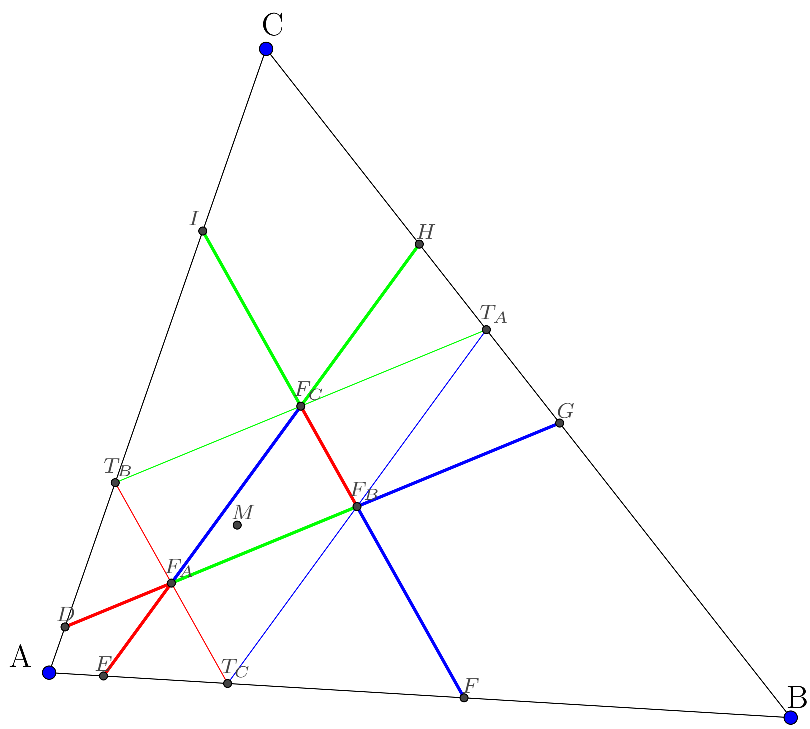
Javítókulcs, Válogató 2016. Nov. 25.

1. ***Az** A, B, C **pontok által meghatározott hegyesszögű háromszögben az egyes csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait jelölje rendre** T_A**,** T_B **és** T_C**. A** $T_AT_BT_C$ **háromszög oldalfelező pontjai legyenek** F_A**,** F_B **és** F_C **rendre a** T_BT_C**,** T_AT_C **és** T_AT_B **oldalakon. Igazoljuk, hogy az** F_AF_B**,** F_CF_A **és** F_BF_C **egyeneseken az** ABC **háromszög által kimetszett szakaszok egyenlő nagyságúak.***

   Megoldásvázlat. Használjuk az ábra jelöléseit. Legyenek a háromszög szögei rendre α, β, γ.



1. ábra

A talpponti háromszög a vizsgált szakaszokat 3 részre osztja. Megmutatjuk, hogy az azonos színnel jelölt szakaszok egyenlők egymással. Ebből következik is a feladat állítása.

A T_A és T_B pontokból az AB szakasz 90° alatt látszik. Tehát az ABT_AT_B négyszög húrnégyszög. Mivel ABT_AT_B húrnégyszög, ezért $T_BT_AC_\angle = CAB_\angle = \alpha$. Hasonlóan láthatjuk, hogy $T_CT_AB_\angle = \alpha$.

(1 pont)

Megmutatjuk, hogy az F_CT_AH háromszög egyenlőszárú. Az előbb beláttuk, hogy $T_BT_AC_\angle = CAB\angle = \alpha$. Az FH szakaszt a T_CT_A oldalhoz tartozó középvonal metszi ki a háromszögből, tehát FH és T_CT_A párhuzamosak. Emiatt $T_CT_AB_\angle = FHB_\angle = \alpha$, azaz F_CT_AH háromszög egyenlőszárú. (2 pont)

Hasonlóan beláthatjuk, hogy az T_BF_CI háromszög is egyenlőszárú. Tehát

$$IF_C = T_BF_C = F_CT_A = F_CH.$$

A középső egyenlőség azért teljesül, mert F_C felezőpont, míg a másik kettőt a megfelelő egyenlőszárú háromszögek mutatják. (1 pont)

F_AF_B középvonal az $F_AF_BF_C$ háromszögben, ezért $F_AF_B = IF_C = F_CT_A$. Ezzel a zöld szakaszok egyenlőségét beláttuk. (1 pont)

Hasonlóan gondolatmenettel a másik két színre is igazolhatjuk a megfelelő szakaszok egyenlőségét. Ezzel a feladat állítását beláttuk. (1 pont)

A megoldás során kihasználtuk, hogy az F_1F_2, F_2F_3, F_3F_1 egyenesek a megfelelő oldalakon metszik a háromszöget. Ha a $D', F', \dots, J'$ jelöli a szakaszok megfelelő oldalegyenesekkel vett metszéspontjait, akkor a fenti meggondolásainkat ezekre a pontokra változtatást nélkül alkalmazhatjuk. Emiatt T_B, D', F', T_C egy Thalesz-kört alkotnak. Mivel $CAB_\angle$ hegyessszög, ezért az A csúcs a körön kívül található. Emiatt a háromszöget a szakaszok a megfelelő oldalakon metszik. (1 pont)

Töredékpontok:

- Talpponti háromszög szögeinek kiszámolása (0 pont)
- Hasonló háromszögek észrevétele (0 pont)
- Diszkusszió hiánya (-1 pont)
- $IF_C = F_CH$ egyenlőség megsejtése (1 pont)

2. 2016 ***rabló együtt elrabolt egy nagy kincsesládát és el akarják ásni. Mivel nem bíznak egymásban, ezért úgy döntenek, hogy szerelnek rá lakatokat és a lakatokhoz való kulcsokat***

szétosztják egymás között. (Egy lakathoz több kulcs is tartozhat, de egy kulcs csak egy lakatot nyit). Úgy szeretnék ezt megtenni, hogy bármely* 1010 *közülük ki tudja nyitni a kincset, de semelyik* 2 *nem tudja ezt megtenni. Legalább hány lakatra van szükségük?

Megoldásvázlat.

6 lakatra van legalább szükség. Kevesebb nem elég: Tegyük fel, hogy n lakat van. Világos, hogy egy kalóznál legfeljebb $n-2$ kulcs lehet. Válasszunk ki tetszőlegesen $n-2$ lakatot, megmutatjuk, hogy legfeljebb 2 kalóznál vannak pontosan ehhez a kulcsok. Ha van egyáltalán olyan kalóz, akinél pont ezek vannak, akkor nincs olyan, akinél ott van a maradék kettő (amik legyenek az a és b lakathoz valók). Viszont minden lakat legalább 1007 embernél van, tehát van legalább 1007 ember, akinél van a-t nyitó kulcs, legalább 1007, akinél b-t nyitó. Ezek különbözőek, tehát az előre rögzített $n-2$ lakathoz legfeljebb 2 kalóznak van kulcsa. (2pont)

Mivel minden lakathoz legalább 1007 kalóznak van kulcsa, összesen legalább $1007 \cdot n$ kulcs van a kalózoknál. Ha $n \leq 5$, és legfeljebb 10 kalóznál van $n-2$ kulcs, a többinél legfeljebb $n-3$, az túl kevés. Tehát 6 lakat kell. (1pont)

Konstrukció 6-ra: legyenek a lakatok $1, 2, \ldots 6$, minden kalóznál 3-hoz lesz kulcs. 10 hármas fog előfordulni, az $1, 2, \ldots, 5$ közül 3 (ciklikusan) szomszédos, illetve ezek közül kettő (ciklikusan) nem szomszédos a 6-tal. (2pont)

Ezen 10 hármas közül 4-hez lesz 201 kalóznak kulcsa, 6-hoz 202-nek. Úgy kell megcsinálni, hogy minden lakat legalább 2 olyan hármasban legyen, amihez 202 kalóznak van kulcsa, de ezt könnyű, és így jó minden. (1pont)

Ha mindkét részre kapott valaki legalább 2 pontot (1pont)

Töredékpontok:
- Bizonyítás, hogy 4 lakat nem elég (1pont)
- Konstrukció több, mint 6 lakattal (1pont)

3. ***Az** a, b, c, d **pozitív egész számokra***

$$ac = \frac{1}{2}bd$$

$$a - d = b - c$$

egyenlőségek teljesülnek. Tegyük fel, hogy $a \geq c$. Mi a legnagyobb λ valós szám, melyre $a \geq \lambda c$ -t kielégíti az egyenletrendszer minden egész a, b, c, d megoldása?

Megoldásvázlat.

Keressük a-t λc alakban, $c \geq 1$. Alsó egyenletet átrendezve: $a + c = b + d$, négyzetéből a felsőt kivonva 8-szor, illetve 4-szer ezeket kapjuk:

$$(a - c)^2 = b^2 + d^2 \tag{1}$$

$$a^2 + c^2 - 6ac = c^2(\lambda^2 - 6\lambda + 1) = (b - d)^2. \tag{2}$$

Innen a baloldal nemnegatívitása miatt $\lambda \geq 3 + \sqrt{8}$. (2pont)

Belátjuk hogy ez a korlát éles.

Ekvivalens állítás: tudunk úgy választani b_n, c_n, d_n egész számokat (2) szerint, hogy

$$\frac{(b_n - d_n)^2}{c_n^2} \to 0,$$

míg az eredeti egyenlőségek, vagy akár csak az ekvivalens átalakítás révén (1) egyenlőség teljesül. (1pont)

$b = d$ sosem fog jó megoldást adni, de $|b - d| = 1$ már végtelen sokszor (vagyis tetszőlegesen nagy c mellett is) igen.

Ez adódhat például abból, hogy (1) egyenlőség Pithagoraszi számhármasokat kíván: ezekre ismert az általános előállítási tétel:

$$(a - c) = x^2 + y^2,\ b = x^2 - y^2,\ d = 2xy$$

alakban kereshető, vagy ennek konstansszorosa a számhármas. (1pont)

Innen az kell, hogy végtelen sok x, y egész párt találjunk melyre például $b - d = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) = 2y^2 + 1 = Z^2$. ($Z := (x - y)$) (1pont)

Ennek végtelen sok megoldása van, hiszen egy $\{y, Z\}$ megoldásból új (nagyobb abszolút értékű) $\{y', Z'\}$ megoldás kapható ahol $y' = 2yZ, Z' = 4y^2 + 1$, egy alapmegoldást pedig könnyen találunk. (Pell egyenlet). Az adódó növekvő (x, y) értékpárok éppen a bizonyítandót adják. (2pont)

Töredékpontok:

• konkrét példa megadásával max λ-t felülről korlátozni: (0pont)

• Célszerű ekvivalens átalakítások, ahonnan egy lépésben levezethető a jó felső korlát (1pont)

• max λ-t alulról korlátozni gyengébb korláttal: (0pont)

• bizonyítás nélkül állítani vagy csak kimondani célnak, hogy olyan pithagoraszi számhármasok sokaságának létezése a kulcs, ahol a két kisebb szám 'közel' van egymáshoz (pontosan definiálva bár a közelséget) (1pont a felső korlátra nézve)

Megjegyzések

• A megoldás első felében arra is lehetett hivatkozni, hogy b és d számokra vonatkozó egyenletek ekvivalens formája, hogy ők gyökei az $X^2 - (a + c)X + 2ac = 0$ másodfokú egyenletnek. Innen a megoldóképletben a diszkrimináns vizsgálata szintén azonnal kiadta a szükséges $\lambda \geq 3 + 2\sqrt{2}$ korlátot.

• A megoldás második felét a végtelen sok megoldásra hivatkozás helyett lehetett úgy is indokolni, hogy megfelelő egész új változók aránya tetszőlegesen megközelítheti a $2\sqrt{2}$ irracionális számunkat, és ezekből a segédváltozókból az a, b, c, d számnégyes visszaépíthető, hogy a/c arány a $\lambda = 3 + 2\sqrt{2}$-t közelítse. ($c = uv, a = \frac{u^2+8v^2}{2}$).

4. ***Legyenek a p_1, p_2, p_3, ... számok a pozitív egész számoknak egy permutációja. Igazoljuk, hogy végtelen sok n-re fog teljesül, hogy p_n és p_{n+1} legnagyobb közös osztója nem nagyobb mint $\frac{3}{4}n$.***

Megoldásvázlat.

Indirekt bizonyítunk, s feltesszük, hogy $n > N$-re már

$$\gcd(p_n, p_{n+1}) > 3n/4.$$

Vegyük észre, hogy ekkor egyrészt $p_n > 3n/4$, másrészt, hiszen a számok mind különbözőek,

$$\max\{p_n, p_{n+1}\} > 3n/2. \tag{3}$$

(1 pont)

Számoljuk össze, hogy a sorozat hány $3N$-nél nem nagyobb pozitív egészet tartalmazhat. (2 pont)

A (3) egyenlőtlenség alapján $2N > k \geq N$ mellett a p_{2k}, p_{2k+1} számok közül legfeljebb az egyik lehet $3N$-nél nem nagyobb. (1 pont)

De az $\ell \geq 4N$ indexű számok mindegyike nagyobb $3N$-nél, (1 pont)
így összesen legfeljebb

$$(2N-1) + N = 3N - 1$$

darab, $3N$-nél nem nagyobb szám lehet a permutált sorozatban, ami ellentmondás. (2 pont)

Töredékpontok:

• Plussz egy jobb becslés (3)-nál, ha nincsen további haladás (ezzel élesebb becslés kapható a feladatban kértnél) (+1pont)

• A kezdeti egyenlőtlenségek alapján valami heurisztikus "aszimptotikus bizonyítás", pontos határok stb. megadása nélkül (3pont)

• A korlátok pontatlan kezelése (kisebb/nem nagyobb keverése) (-1 pont)

• $3N$ helyett olyan felső határ választása, amelynél paritási/mod 3 gondok, vagy túl kis n értékek merülnek fel (-1pont)