Véges matematika II. haladó gyakorlat

8. alkalom

1. Feladat: Határozzuk meg az $a_n = 2^n$ sorozat generátorfüggvényét, illetve exponenciális generátorfüggvényét!

Megoldás: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n = \dfrac{1}{1-2x}$, illetve $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \dfrac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2 \cdot x)^n}{n!} = e^{2x}$

2. Feladat: Adjuk meg azokat a sorozatokat, amelyek generátorfüggvényei a következők:
a) $g_1(x) = \frac{1}{1-3x}$
b) $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$
c) $g_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Megoldás: Az előző feladat alapján az $a_n = a^n$ mértani sorozat generátorfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{1 - a \cdot x}$.
a) A $g_1(x)$ függvény az $a = 3$ választással $a_n = 3^n$ sorozat generátorfüggvénye.
b) A $g_2(x)$ függvény az $a = -1$ választással $a_n = (-1)^n$ sorozat generátorfüggvénye.
c) A $g_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$ függvény $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ és x^2 függvények kompozíciója, tehát $g_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = 1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + 0 + x^6 + 0 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$, ahol $a_k = 0$, ha k páratlan, és $a_k = 1$, ha k páros: $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2}$.

3. Feladat: Oldjuk meg a következő rekurziókat:
a) $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, továbbá $3 \leq n$ esetén $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$
b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, továbbá $3 \leq n$ esetén $b_n = 10 \cdot b_{n-1} - 25 \cdot b_{n-2}$

Megoldás:

a) A karakterisztikus egyenlet: $x^2 - 2 \cdot x - 2 = 0$. Ennek két különböző megoldása van $q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{1+2}$, $q_1 = 1 + \sqrt{3}$, $q_2 = 1 - \sqrt{3}$. Tehát $a_n = \alpha \cdot (1 + \sqrt{3})^n + \beta \cdot (1 - \sqrt{3})^n$. Mi lehet az a_0 úgy, hogy a rekurzív képlet $2 = n$-re is igaz maradjon? $a_2 = 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_0$, $8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot a_0$, tehát $a_0 = 1$.

$$1 = a_0 = \alpha \cdot (1 + \sqrt{3})^0 + \beta \cdot (1 - \sqrt{3})^0 \qquad \text{azaz } 1 = \alpha + \beta, \text{ tehát: } \beta = 1 - \alpha$$
$$3 = a_1 = \alpha \cdot (1 + \sqrt{3})^1 + \beta \cdot (1 - \sqrt{3})^1 = (\alpha + \beta) + \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 1 + \sqrt{3}(2\alpha - 1)$$

$2 = \sqrt{3}(2\alpha - 1)$, azaz $\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 = 2\alpha$, tehát $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$ és $\beta = 1 - \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ezek szerint:

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)^n$$

b) A karakterisztikus egyenlet: $x^2 - 10 \cdot x + 25$. Ennek egyetlen kétszeres gyöke van: $q_{1,2} = q = 5$. Tehát $b_n = (\alpha + n \cdot \beta) \cdot 5^n$. Mi lehet a b_0 úgy, hogy a rekurzív képlet $2 = n$-re is igaz maradjon? $b_2 = 10 \cdot b_1 - 25 \cdot b_0$, $3 = 10 \cdot 1 - 25 \cdot b_0$, tehát $b_0 = 7/25$.

$$\frac{7}{25} = b_0 = (\alpha + 0 \cdot \beta) \cdot 5^0 = \alpha$$
$$1 = b_1 = (\alpha + 1 \cdot \beta) \cdot 5^1 = (\frac{7}{25} + \beta) \cdot 5 \quad \text{azaz } \frac{1}{5} = \frac{7}{25} + \beta, \text{ tehát: } \beta = -\frac{2}{25}$$

Tehát $b_n = \left(\dfrac{7}{25} - n \cdot \dfrac{2}{25}\right) \cdot 5^n = (7 - 2n) \cdot 5^{n-2}$.

4. Feladat: Egy turista Bergengóciában minden nap egyet vásárol a következő áruk közül: fagylalt (1 Ft), gyümölcslé (2 Ft), illetve képeslap (2 Ft). Hányféleképpen költhet el így 150 forintot?

Megoldás: Írjunk fel rekurziót arra az (a_n) sorozatra, aminek a_n tagja pont azt mondja meg, hogy hányféleképpen költhet el így n forintot a turista. $a_0 = 1$, mert nulla forintot csak egyféleképpen költhet el: nem vesz semmit. $a_1 = 1$, mert 1 forintot csak egyféleképpen költhet el: fagylaltot vesz. ($a_2 = 3$, mert vagy két egymás utáni nap vesz fagylaltot, vagy csak gyümölcslevet vesz, vagy csak képeslapot vesz.)
Ha az első nap csak egy forintot költ, akkor azt az egy forintot csak egyféleképpen költheti el, és még $n-1$ forintja marad a további napokra, amit a_{n-1} féleképpen költhet el. Ha az első nap két fotintot költ, akkor azt a két forintot egy dologra kétféleképpen költheti el (vagy gyümölcslevet vesz, vagy képeslapot), és ekkor $n-2$ forintja marad a további napokra, amit a_{n-2} féleképpen költhet el.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$
$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$$
$$x^2 = 1 \cdot x + 2 \quad 0 = x^2 - x - 2$$

$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$, $q_1 = 2$, $q_2 = -1$. $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$. $1 = a_0 = \alpha + \beta$, azaz $\beta = 1 - \alpha$. $1 = a_1 = 2\alpha - \beta = 3\alpha - 1$, azaz $\alpha = 2/3$ és $\beta = 1/3$. $a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$. Tehát $a_{150} = \frac{2^{151}+1}{3}$.

5. Feladat: Hány n betűs szó készíthető az a, b és c betűkből, ha
a) nem állhat egymás mellett két b betű?
b) b betű után közvetlenül nem jöhet c betű?

Megoldás: Jelölje a_n azt a számot, ahány n betűs szó készíthető az a, b és c betűkből az adott feltétel mellett. Esetszétválasztással adjunk rekurzív képletet a_n-re. Célszerű úgy választani az eseteket, hogy a valahány betűs, a megadott feltételt kielégítő sorozat a-ra, b-re, vagy c-re végződik. Jelölje A_n azt a számot, ahány n betűs, **a-ra végződő** szó készíthető az a, b és c betűkből az adott feltétel mellett. Hasonlóan jelölje B_n azt a számot, ahány n betűs, **b-re végződő** szó készíthető az a, b és c betűkből az adott feltétel mellett. Hasonlóan jelölje C_n azt a számot, ahány n betűs, **c-re végződő** szó készíthető az a, b és c betűkből az adott feltétel mellett. Tudjuk, hogy a keresett $a_n = A_n + B_n + C_n$.
a) Ha nem állhat két b betű egymás mellett, akkor $A_n = a_{n-1}$ hiszen egy tetszőleges (a feltételnek eleget tévő) sorozat végére odaírva egy a betűt, eggyel hosszebb, a feltételnek eleget tévő, a-ra végződő sorozatot kapunk. Hasonlóan $C_n = a_{n-1}$. De b-re végződő sorozatot eggyel rövidebb sorozat végére biggyesztett b-vel csak a-ra vagy c-re végződő sorozatból kaphatunk: $B_n = A_{n-1} + C_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-2}$ felhasználva a korábban belátott egyenlőségeket. $a_n = A_n + B_n + C_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$ a rekurzív képlet. A rekurzió akkor lesz teljes, ha el is indítjuk: $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$. Vagy még korábbról: $a_0 = 1$, hiszen nulla-hosszúságú sorozat egyetlen van: az üres szó. Ez pont a **3. a)** feladat rekurziója, amit már megoldottunk.
b) Ha nem állhat b után közvetlenül c, akkor $A_n = a_{n-1}$ és $B_n = a_{n-1}$, hiszen a-t és b-t korlátozás nélkül biggyeszthetünk egy szó végére. Viszont c-t csak a-ra vagy c-re végződő szó végére biggyeszthetünk: $C_n = A_{n-1} + C_{n-1}$. Ebben az utolsó képletben sajnos az egyenlőség mindkét oldalán szerepel a C_k sorozat, rögtön nem helyettesíthetjük a jobb oldalba a korábbi egyenlőségek eredményét. De vegyük észre, hogy ez kiküszöbölhető! $a_n = A_n + B_n + C_n$ miatt $A_n + C_n = a_n - B_n$. Tehát $C_n = A_{n-1} + C_{n-1} = a_{n-1} - B_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$. És így $a_n = A_n + B_n + C_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 3 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ a rekurzív képlet. A rekurzió megint csak akkor lesz teljes, ha elindítjuk: $a_0 = 1$ és $a_1 = 3$ ($a_2 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$).
A karakterisztikus egyenlet $x^2 - 3x + 1 = 0$, ennek a gyökei $q_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Tehát $a_n = \alpha \cdot (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + \beta \cdot (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$. $1 = a_0 = \alpha + \beta$, azaz $\beta = 1 - \alpha$.
$3 = a_1 = \alpha \cdot (\frac{3+\sqrt{5}}{2}) + \beta \cdot (\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = (\alpha + \beta) \cdot \frac{3}{2} + (\alpha - \beta) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$, azaz $\frac{3}{2} = (\alpha - \beta) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = (2\alpha - 1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$ azaz $\frac{3}{\sqrt{5}} = 2\alpha - 1$, $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $\beta = 1 - \alpha = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$. Tehát $a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \cdot (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$.

6. Feladat: Adjunk meg olyan rekurziót, amelynek megoldása $a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^n$!

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet két gyöke $q_1 = 2$ és $q_2 = 5$, azaz a karakterisztikus egyenlet $0 = (x-2) \cdot (x-5) = x^2 - 7x + 10$. Az ennek megfelelő rekurzív képlet: $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$. A két kezdőtag: $a_0 = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2$, $a_1 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -5$.

7. Feladat: Hány olyan $2n+1$ hosszúságú, ± 1 értékekből álló sorozat van, amelyben az elemek összege 1, továbbá bármely kezdőszelet összege $(a_1\ ,\ \ a_1+a_2\ ,\ \ a_1+a_2+a_3\ ,\ \ldots)$ pozitív?

Megoldás: Azaz $n+1$ darab 1-est és n darab -1-est kell sorbarakni. Az első mindig 1-es. Szabadságunk csak a maradék n darab 1-es és n darab -1-es sorrendjére van. Egy ilyen $(a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2n})$ sorozatnak megfeleltethetünk egy sétát az origóból a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rácspontokon: ha 1-et látunk, y-irányban lépünk egyet, ha -1-et látunk, akkor x-irányban lépünk egyet. Tehát a séta $(0,0)$ pontból indul, és (n,n) pontba érkezik olyan pontokon keresztül, hogy sohasem nagyobb az x koordináta értéke, mint y-é. Ezt már tudjuk, hogy ilyen sétából $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ van.

8. Feladat: Hányféleképpen bonthatunk háromszögekre egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlóival? (A sokszög csúcsai legyenek megszámozva. Tehát egy négyszög egyik átlójával való háromszögelését és a másikkal valót különböztessük meg!)

Megoldás: Kis esetek: $n=3$ egy háromszög egyféleképpen háromszögelhető, $n=4$ egy konvex négyszög kétféleképpen háromszögelhető: az $1,2$ él vagy a 3 csúccsal alkot háromszöget, vagy a 4 csúccsal. Az $n=5$ esetben hasonlóan okoskodhatunk: az 5 és 1 csúcsokat összekötő él biztosan benne van valamelyik háromszögben, csak az a kérdés, a 2, 3 és 4 csúcsok közül ki lesz ennek a háromszögnek a harmadik csúcsa: $5,1,2$ háromszög esetén a $2,3,4,5$ négyszöget még kétféleképpen lehet háromszögelni. $5,1,4$ háromszög esetén az $1,2,3,4$ négyszöget is kétféleképpen lehet háromszögelni. De az $5,1,3$ háromszög mindkét oldalán egy-egy háromszög van, azaz ebben az esetben csak egyféle háromszögelést kapunk. Ez összesen ötféle háromszögelés.

Ez a módszer általánosítható: aszerint csináljunk esetszétválasztást, hogy az n-szög $n,1$ éle melyik csúccsal alkot háromszöget. Erre $2,3,4,\ldots,n-1$ csúcsok jöhetnek szóba, ezt jelölje a k paraméter. (Az $n,1,k$ háromszög benne van a háromszögelésben.) Tipikus esetben az $n,1,k$ háromszög két oldalán az $1,2,\ldots,k$ sokszöget (k-szöget) és a $k,k+1,\ldots,n-1,n$ sokszöget ($n-k+1$-szöget) kell még tovább háromszögelni. $k=2$ esetben az első nem egy sokszög, míg $k=n-1$ esetben a második nem lesz sokszög. De ha szélsőséges esetben úgy definiáljuk, hogy egy „két csúcsú sokszög" egyféleképpen legyen háromszögelhető, akkor a k minden értékére egyforma képletet kapunk. Jelölje A_n azt a számot, ahányféleképpen háromszögelhető a konvex n-szög. Tudjuk, hogy $A_3=1$, $A_4=2$, $A_5=5$, és úgy definiáltuk, hogy $A_2=1$ legyen. Ha $i\le n-1$ esetekre tudjuk A_i értékét, akkor azzal az esetszétválasztással, amit fent csináltunk: $A_n = A_2\cdot A_{n-1}+A_3\cdot A_{n-2}+A_4\cdot A_{n-3}+\cdots+A_{n-1}\cdot A_2=\sum_{k=2}^{n-1}A_k\cdot A_{n-k+1}$.

Célszerűnek tűnik átindexelni a sorozatunkat, hogy 0-tól induljon: $C_n=A_{n-2}$, azaz $C_0=A_2=1$, $C_1=A_3=1$, $C_2=A_4=2$, $C_3=A_5=5$, és általában $C_{n-2}=C_0\cdot C_{n-3}+C_1\cdot C_{n-4}+C_2\cdot C_{n-5}+\cdots+C_{n-3}\cdot C_0$ vagyis $C_n=C_0\cdot C_{n-1}+C_1\cdot C_{n-2}+\cdots+C_{n-2}\cdot C_1+C_{n-1}\cdot C_0=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\cdot C_{n-k}$.

Mint látjuk, ez éppen a Catalan számok rekurziója, azaz $C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ és ennyiféle különböző háromszögelése lehet az $n+2$ csúcsú konvex sokszögnek.